Primitives et intégrales

Table des matières

Primitive

Définition

Soit f définie et continue sur un intervalle I.
On dit que **F définie sur I est une primitive de f** si pour tout x∈I **F' (x) =f (x)**

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive

Démonstration différée au prochain chapitre

Propriétés

Si F et G sont 2 primitives de f alors F – G est une constante. En effet (F–G)' = f – f = 0

Toutes les primitives de f sont de la forme F + K où K est une constante. Si G-F est une constante K alors G = F+K

Soit Xo∈ I et Yo ∈ℝ il existe une et une seule primitive de f vérifiant F(xo) = Yo G(xo)=F(xo) + k ≠ yo

Soit $(a,b)\in I^2$ et F une primitive de f . Alors F(b) –F(a) ne dépend pas de la primitive choisie G(a)–G(b)= F(a)+k –[F(b)+k]=F(a) –F(b)

Tableau des primitives

fonction	primitive à k près
0	0
λ	λx
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
x^{-n}	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$
$\frac{1}{x}$	ln(x)
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
cos(x)	sin(x)
sin(x)	–cos(x)
e^x	e^x
f+g	F+G
λf	λF
λf+δg	λF+δG
U'U	$\frac{1}{2}U^2$
$U'U^n$	$\frac{U^{n+1}}{n+1}$
$\frac{U'}{U^2}$	$-\frac{1}{U}$
$\frac{U'}{U^n}$	$-\frac{1}{(n-1)U^{n-1}}$
$\frac{U'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{U}$
$U'e^U$	e^U
$\frac{U'}{U}$	$\ln(U)$
U'f(U)	F(U)

Pour trouver une primitive, la méthode est de faire appel à nos connaissances sur la dérivation pour chercher parmi toutes les fonctions dérivables connues celle qui pourrait avoir pour dérivée une fonction approchant celle dont il faut trouver une primitive.

Fonction et primitive doivent avoir le même domaine de définition.
Par exemple ln(x) n'est une primitive de 1/x que si x est strictement positif.
Le dénominateur des fractions ne peut pas s'annuler.
Les valeurs sous une racine ne peuvent pas être négatives.

λ, δ sont des réels quelconques
f et g sont des fonctions continues sur un intervalle, F et G une de leurs primitives

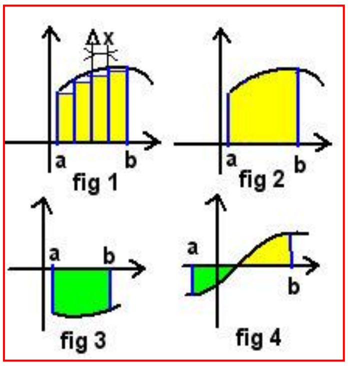
U est une fonction continue sur un intervalle I et U' sa dérivée.

Ici il s'agit de reconnaître des dérivées de fonctions composées mélangeant U et U'
La primitive est une fonction composée.
La fonction U ne doit pas s'annuler quand elle figure au dénominateur d'une expression, et être strictement positive quand elle figure sous une racine ou dans un logarithme

Intégrale

Définition

On appelle **intégrale de f sur [a,b]** la mesure algébrique en unités d'aire de l'aire située entre le graphe de f(x) , l'axe des x, et les droites d'équation x=a et x=b. On note l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$



Dans un repère orthogonal, si J est le point (0,1) et I le point (1,0) l'unité d'aire que nous utiliserons par la suite est celle du rectangle de côtés OI et OJ.
Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle [a,b]

Figure 1 : aire algébrique colorée en jaune = Σ f(x_i) Δx. (ici f(x) > 0 → aire positive)

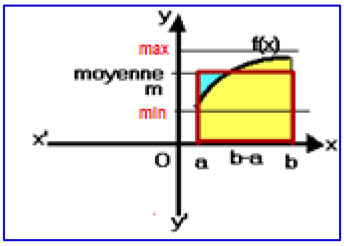
Figure 2 : si Δx ➜ dx ➜0 l'aire algébrique est notée $\int_a^b f(x)dx$ qui se lit « somme de x= a à x=b de f(x)dx » ou encore « intégrale sur [a;b] de f(x) dx ».

L'intégrale peut donc être vue comme la limite d'une somme d'aires quand Δx ➜0.

Figure 3 : si f(x) < 0 sur l'intervalle [a,b] l'aire algébrique $\int_a^b f(x)dx$ est négative.

Figure 4 : si le signe de f(x) change sur [a,b] l'aire algébrique est la somme de parties négatives et de parties positives et il pourrait arriver que cette aire soit nulle, alors qu'elle a une réalité physique.

Moyenne d'une fonction sur [a,b]

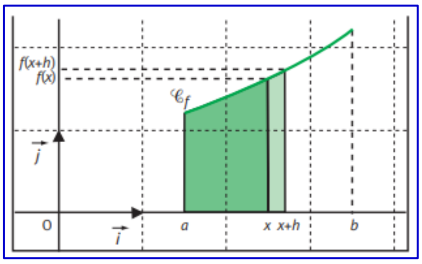


Quelle que soit l'aire **S=**$\int_a^b f(x)$, il existe une valeur moyenne **m** telle que l'aire du rectangle de largeur **m** et de longueur **(b - a)** soit égale à **S**. **m(b-a) =**$\int_a^b f(x)dx$.

On peut donc évaluer la moyenne de f sur [a,b] **m =** $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Si max et min sont les valeurs maximale et minimale de f(x) sur [a;b]
min ≤ m ≤ max

L'intégrale F(x)



Soit f continue sur [a,b] et x ∈[a;b] on définit F(x) = $\int_a^x f(t)dt$
Alors F(x) est dérivable sur [a,b] et sa dérivée est f(x) .

En effet $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$ $\int_x^{x+h} f(t)dt$ étant l'aire représentée en vert clair.
Cette aire est encadrée par l'aire des rectangles h.f(x) et h.f(x+h) et quand on divise par h on trouve que $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ est encadrée par f(x) et f(x+h). Donc quand h →0 la limite de cette expression est f(x). Autrement dit f(x) est le nombre dérivé de F(x) en x. CQFD.
F(x) étant une primitive de f(x) cela démontre le théorème précédemment énoncé:

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive

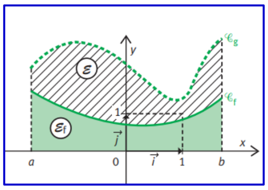
Calcul de $\int_a^b f(x)dx$

F(x) = $\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f et la seule qui s'annule en a: F(a) = 0
Si on prend cette primitive on peut écrire F(b) =$\int_a^b f(t)dt$ et F(a) =0
Si on prend n'importe quelle primitive F(x) on peut écrire que

$\int_a^b f(t)dt$ **= F(b) –F(a)** s'écrit aussi **$[F(x)]_a^b$**

Propriétés

- Si c∈ [a;b] $\int_c^c f(x)dx = 0$
- Si f et g continues et positives sur [a,b] et f(x) ≥ g(x) pour tout x ∈[a;b] $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- **Relation de Chasles**: si c∈ [a,b] $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- **Inversion des bornes** $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$ F(b) - F(a) pour l'une et F(a) – F(b) pour l'autre.
- **Linéarité** $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$
- **de l'aire algébrique à l'aire physique** $\int_a^b f(t)dt$ est l'aire algébrique $\int_a^b |f(t)|dt$ est l'aire physique



- **Aire comprise entre deux graphes.**
Si pour tout x ∈[a;b] f(x) ≥ g(x) l'aire physique comprise entre les 2 graphes, et les droite x=a et x=b (hachurée sur la figure) est $\int_a^b (f-g)(t)dt$

Méthodes

Primitive de ...

■ **f=** $\frac{5}{x^2}$ = **5x^{-2}** en dérivant le degré diminue d'un donc on cherche autour de x^{-1}= $\frac{1}{x}$ dont la dérivée est $-\frac{1}{x^2}$

Pour obtenir la dérivée souhaitée, il faut multiplier par –5 et donc partir de F(x) =$\frac{-5}{x}$ + k

■ **f =**$\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-2}}$ on reconnait en 2x+1 la dérivée de x^2+x-2 donc forme $\frac{U'}{\sqrt{U}}$ alors que la dérivée de $\sqrt{U}$ devrait être $\frac{U'}{2\sqrt{U}}$.

C'est donc qu'on a dérivé $2\sqrt{U}$ et F(x) = $2\sqrt{x^2+x-2}$ + k

■ **f=cos(2x)** On cherche autour de sin(2x) dont la dérivée devrait être 2cos(2x). En conséquence F(x)=$\frac{\sin(2x)}{2}$ + k

■ **f = e^{-x}** On sait que la dérivée de la fonction composée e^{-x} est – e^{-x} donc F(x) = – e^{-x} +k

■ **f =** $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On reconnait – $\frac{U'}{U}$ or $\frac{U'}{U}$ est la dérivée de ln(U). On a donc dérivé – ln(U)= -ln(cos(x))= ln($\frac{1}{\cos(x)}$)= F(x) à k près.

Exprimer xe^x en fonction de sa dérivée e^x +xe^x donc f = f ' – e^x . **En déduire une primitive de f.**

primitive de f = primitive de f ' + primitive de –e^x = f – e^x = xe^x –e^x c'est une des primitives cherchées.

Intégrale de ...

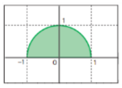
■$\int_{-3}^{2} \boldsymbol{2x^3dx}$. Primitive $2\frac{x^4}{4}$ Intégrale $\frac{1}{2}$ (2^4–$(-3)^4$)= – 32,5.

■$\int_1^e \frac{\ln(t)}{t}\boldsymbol{dt}$ on reconnait UU' dérivée de $\frac{1}{2}U^2$ primitive $\frac{1}{2}(\ln t)^2$ intégrale $\frac{1}{2}$ [$(\ln(e))^2$–$(\ln(1))^2$] =$\frac{1}{2}$

■$\int_0^4 |\boldsymbol{2t-3}|\boldsymbol{dt}$ si 2t –3 ≥ 0 c'est-à-dire **t ≥ 3/2** alors **f(t)=2t–3** et si **t< 3/2** alors **f(t)= – 2t –3** on peut donc écrire que

$\int_0^4 |2t-3|dt = \int_0^{3/2}(\boldsymbol{-2t+3)dt} + \int_{3/2}^4(\boldsymbol{2t-3})dt$ =$[-t^2+3t]_0^{3/2}$ + $[t^2-3t]_{3/2}^4$ = -9/4+9/2 +16 -12 – (9/4 – 9/2) =8,5

■$\int_{-1}^{+1}\sqrt{\boldsymbol{1-x^2}}\,dx$. On ne connait pas la primitive de $\sqrt{1-x^2}$ mais y^2+x^2 =1. Donc c'est l'équation d'un demi-cercle centré en O et de rayon 1. L'aire cherchée est donc la moitié de l'aire du cercle soit π/2.



■ I=$\int_o^\pi cos^2xdx$ et J=$\int_0^\pi sin^2xdx$. Calculer I+J, I-J, en déduire I et J.

I+J =$\int_0^\pi(cos^2x+sin^2x)dx$ =$\int_0^\pi 1.dx$ = $[x]_0^\pi$ = π

I–J= $\int_0^\pi(cos^2x-sin^2x)dx$ = $\int_0^\pi \cos(2x).dx$ = $[\frac{\sin(2x)}{2}]_0^\pi$ = 0

I =$\frac{(I+J)+(I-J)}{2}$ = $\frac{\pi}{2}$ J=$\frac{(I+J)-(I-J)}{2}$ = $\frac{\pi}{2}$

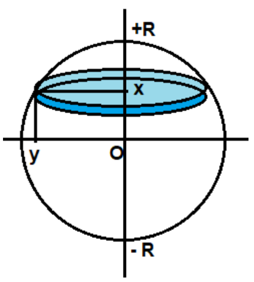
■ Majorer et minorer Un= $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$ pour n entier naturel non nul. En déduire que (Un) converge vers 0.

X étant entre 0 et 1 toute puissance de x est un nombre inférieur ou égal à 1.

Donc $\frac{x^n}{2}$ < $\frac{x^n}{1+x^2}$ < x^n les intégrales de ces fonctions (toutes positives sur I) suivant la même inégalité, on a

$[\frac{x^{n+1}}{2(n+1)}]_0^1$ < Un < $[\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1$ autrement dit $\frac{1}{2n+2}$ < Un < $\frac{1}{n+1}$ et les gendarmes → 0 donc Un →0

Calcul d'un volume: l'intégrale vue comme une somme



Dans la boule de centre O et de rayon R, l'élément de volume en bleu est une tanche très fine, qui coupe perpendiculairement l'axe des x au point d'abscisse x.
dx peut être considéré comme l'amplitude d'un tout petit intervalle de l'axe des x, si petit qu'on peut considérer que sur cet intervalle x et f(x) ne varient pratiquement pas. C'est un infinitésimal.
Si la hauteur de notre élément de volume est dx, les faces en forme de disques de la tranche de sphère correspondant aux abscisses x et x+dx ont pratiquement le même rayon (y) et notre élément peut être assimilé à un cylindre de section πy^2 (aire du disque) et de hauteur dx.
Comme x^2+y^2 =R^2, le volume de cet élément est π(R^2- x^2)dx .
On a fait disparaître y pour que notre élément de volume apparaisse sous la forme f(x)dx .
Maintenant on peut considérer que le volume de la sphère est la somme des éléments de volume quand x varie de – R à +R ce que l'on écrit V = $\int_{-R}^{+R}$ π$(R^2 - x^2)$dx.

La linéarité de l'intégrale permet d'écrire V =π ($\int_{-R}^{+R} R^2dx$ – $\int_{-R}^{+R} x^2dx$)

La primitive de R^2 (constante) est R^2x et l'intégrale correspondante est R^2R –R^2(-R) = 2R^3

La primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$ et l'intégrale correspondante est $\frac{R^3}{3} - \frac{(-R)^3}{3} = \frac{2R^3}{3}$

Au total V =π (2R^3 – 2R^3/3) = $\frac{4}{3}$ πR^3 (formule connue).

On pourrait, selon le même procédé, calculer d'autres volumes, à condition de savoir exprimer la surface de l'élément de volume en fonction de x (dx étant sa hauteur) …