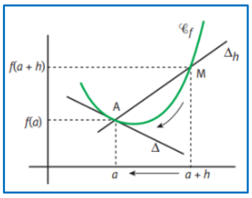
Fonctions

Table des matières

Rappels sur la dérivation



Soit un point fixe A appartenant au graphe de f(x). Ses coordonnées sont (a, f(a)).
Soit M un point quelconque du graphe de coordonnées (x, f(x))
Le taux d'accroissement de f entre A et M est $T(x)=\frac{f(a)-f(x)}{a-x}$.
C'est le coefficient directeur de la droite (AM). On le note aussi $T(x) = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ où Δf = f(a) –f(x) est la variation de f(x) correspondant à une variation de x de Δx= a – x entre A et M .

Le nombre dérivé de f(x) en a, noté f'(a) est la limite, si elle existe, de T(x) quand x → a

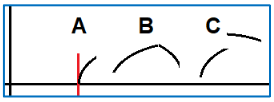
Autrement dit f '(a) = $\lim_{x \to a} \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$ ou $\lim_{h \to 0} \frac{f(a)-f(a+h)}{h}$ ou $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

Le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente en P au graphe de f(x).

Autrement dit si y = **a**x +**b** est l'équation de la tangente au graphe de f en P de coordonnées (p, f(p))

a= f '(p) et **b** = f(p) – (p) f '(p)

f(x) est dite dérivable sur [a;b] si f admet un nombre dérivé en tout point de cet intervalle.



A f non dérivable f'(x) → +∞ (tangente // axe des y)
B f non dérivable dérivée à gauche ≠ dérivée à droite (brisure)
C f non dérivable Δx tend vers 0 mais pas Δy (cassure)

Si f(x) est dérivable sur [a,b] **la fonction dérivée** de f notée f '(x) est celle qui à x → f '(x) .

Sens de variation de f(x) et dérivée

f(x) étant dérivable sur les intervalles cités, les propositions ci-après sont équivalentes deux à deux:

f(x) croissante sur [a,b]	⟺	f ' (x) positive sur [a,b] sauf peut-être nulle en des points isolés
f(x) décroissante sur [a,b]	⟺	f ' (x) négative sur [a,b] sauf peut-être nulle en des points isolés
f(x) admet un extrémum pour x = c	⟺	f '(c)= 0 et f '(x) change de signe en x = c

Calcul de la fonction dérivée

fonction	équivalent	fonction dérivée	Domaine de dérivabilité
x^n		nx^{n-1}	ℝ si n ≥ 0 ℝ - {0} si n < 0
a	x^0	0	ℝ
$\frac{1}{x^n}$	x^{-n}	$-nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$	ℝ - {0} si n >0
$\frac{1}{x}$	x^{-1}	$-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$	ℝ - {0}
$\sqrt{x}$	$x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	ℝ - {0}
sin(x)		cos(x)	ℝ
cos(x)		– sin(x)	ℝ
u+v		u'+v'	ℝ
uv		u'v+v'u	ℝ
au		au'	ℝ
$\frac{u}{v}$		$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	ℝ – {zéros de v}
$\frac{1}{u}$		$-\frac{u'}{u^2}$	ℝ – {zéros de u}

Légende:
a = nombre réel quelconque,
n = entier relatif,
u et **v** sont des fonctions de x dérivables sur ℝ ,
u' et **v'** leur dérivée

Fonction composée:

Soit f(x) une fonction non usuelle de x comme cos(x^2+3x+2). En faisant le changement de variable u= x^2+3x+2, f devient une fonction usuelle de u → f(u) = cos(u). Si on note v la fonction x → cos(x), f =v(u) est une fonction de fonction ou fonction composée. On peut décomposer ainsi le calcul de f(x) : $\boxed{x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{v} v(u) = f(x)}$. On applique à x la fonction U puis au résultat la fonction V. On note **f = v ∘ u** (v rond u)
En supposant que u et v soient dérivables sur un même intervalle. La dérivée de f par rapport à x est $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$. On reconnait le produit (dérivée de f par rapport à u) par (dérivée de U par rapport à x).

Dérivée de f(x) = f(U(x)) par rapport à x = (dérivée de f par rapport à U) X (dérivée de U par rapport à x)

Dérivée de y = cos(x^2+3x+2) → y =cos(U) et U' =2x+3 → y' = **[– sin(U)] (2x+3)** = – (2x+3)sin(x^2+3x+2)
Dérivée de y = $(5x^2+3)^4$ → y = U^4 et U' = 10x → y' = **[$4U^3$] (10x)** = $40x(5x^2+3)^3$

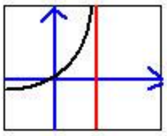
Limites d'une fonction

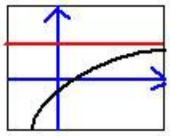
Définition d'une valeur limite quand x $\to +\infty$	**Définition d'une valeur limite quand x $\to -\infty$**
Si pour tout nombre r ≠ 0 il existe un seuil S tel que pour x > S **f(x) ∈] L – r ; L+ r[** alors **Lim f(x) = L** pour tout x > S **f(x) ∈] r ; +∞ [** alors **Lim f(x =+∞** pour tout x >S **f(x) ∈]–∞ , r[** alors **Lim f(x) = –∞**	Si pour tout nombre r ≠ 0 il existe un seuil S tel que pour x < S **f(x) ∈] L – r ; L+ r[** alors **Lim f(x) = L** pour tout x < S **f(x) ∈] r ; +∞ [** alors **Lim f(x =+∞** pour tout x < S **f(x) ∈]–∞ , r[** alors **Lim f(x) = –∞**

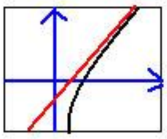
Le cas où f(x) → ±∞ quand x → a (a∈ℝ)

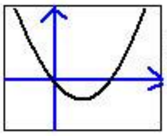
Cela se produit si **l'image pas f de tout intervalle de la forme]a; a+S[ou]a-S ; a[est un intervalle de la forme]r ; +∞[ou] -∞ ; r[.** Le plus souvent, si $\lim_{x\to a}(f(x)$ = **±∞**, c'est que f(x) est une fraction rationnelle a étant une valeur qui annule son dénominateur.	En général, il faut étudier le signe de f(x) quand x→a pour savoir si la limite est + ∞ ou – ∞. Si x= a annule le dénominateur d'une fraction rationnelle, cela signifie qu'on peut mettre (x-a) en facteur au dénominateur et la fraction s'écrit $\frac{1}{(x-a)^n}$ .g(x) moyennant quoi il est facile d'étudier le signe de cette expression selon que (x-a) est positif (x→a+) ou négatif (x→a–) car le signe de g(a) est connu.

Interprétation graphique


asymptote verticale


asymptote horizontale


asymptote oblique


branche infinie

Asymptote verticale si	**Asymptote horizontale** si	**Asymptote oblique** si	**Branche infinie** si
$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$	$\lim_{x\to+ou-\infty} f(x) = a$	$\lim_{x\to\pm ou-\infty} f(x) = \pm\infty$ **et** $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ **= a** (a = coeff directeur asymptote)	$\lim_{x\to\pm ou-\infty} f(x) = \pm\infty$ **et** $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ **= ±∞**

Opérations sur les fonctions et limites

Si ✪ est une opération quelconque (somme, produit, quotient ..) et f et g deux fonctions quelconques, en général on a **lim (f ✪ g) = lim f ✪ lim g** et si K est un réel quelconque on a **lim Kf = K lim f**.
Mais il y a indétermination dans les cas suivants: **f + g :** + ∞ –∞ **fg :** (0)(∞) **f/g :** 0/0 et ∞/∞
Il y a indétermination quand les 2 opérandes tendent à donner des résultats contradictoires. (Ce n'est pas le cas de 0/∞ ou ∞/0)

Limite d'une fonction composée f = U o V quand x → ±∞.
Soit **L** la limite (éventuellement infinie) de V(x) quand x → ±∞. Si $\lim_{x\to L} U(x)$ = **L'** (éventuellement infinie) alors **L'** est la limite de f quand x → ±∞

Théorème des gendarmes: si u ≤ f ≤ v quand u et v ont pour limite L quand x → λ , c'est aussi le cas de f.

Quelques résultats importants

(Dans ce qui suit a est un réel non nul, n est généralement un entier naturel mais il peut prendre les valeurs 1/2 : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$).

$\lim_{x\to\pm\infty} ax^n$	∞	limite +∞ ou – ∞ selon le signe de x, de a et la parité de n
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x^n}$	0	limite 0^+ ou 0^- selon le signe de x, de a et la parité de n
$\lim_{x\to 0} \frac{a}{x^n}$	∞	limite +∞ ou – ∞ selon le signe de x, de a et la parité de n

Quand x → ±∞ une somme de termes de la forme ax^n (n∈ ℤ) a même limite que son monôme de plus haut degré.

$$\lim_{x\to-\infty}(3x^3 - 2x - \frac{1857}{x^2}) = \lim_{x\to-\infty}(3x^3\ ) = -\infty$$

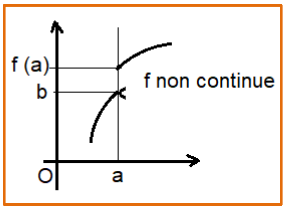
Quand x → ±∞ une fraction rationnelle a même limite que le quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{3x+2}{5x^2+2x+3}) = \lim_{x\to+\infty}(\frac{3x}{5x^2}) = \lim_{x\to+\infty}(\frac{\frac{3}{5}}{x}) = 0$$

Suites et fonction

Si Un = f(n) et que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ (éventuellement infinie) alors la limite de f(n) est L.
Soit Un = f(Vn) . Si lim Vn = **L** (infinie ou pas) et $\lim_{x\to L} f(x)$ = **L'** alors lim Un = **L'**

Continuité d'une fonction



Définition:
Soit un intervalle I et un nombre a ∈I
f(x) est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
f(x) est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Si f est une fonction sur I tout point de I a une image et une seule. Donc il est impossible que la droite x = a coupe le graphe en 2 points. Sur la figure, seul le brin supérieur du graphe a un point d'abscisse a et d'ordonnée f(a).
On voit que la limite de f(x) quand x → a , x < a n'est pas f(a) mais b. Donc la fonction de la figure n'est pas continue.

Un exemple de fonction définie sur ℝ mais pas continue: la fonction partie entière de x notée E(x)
E(1,999999…) = 1 et E(2) = 2.
Cette fonction étant constante sur l'intervalle entre deux nombres entiers, et son niveau s'élevant au fur et à mesure que les entiers croissent, on dit que c'est une fonction "en escalier".

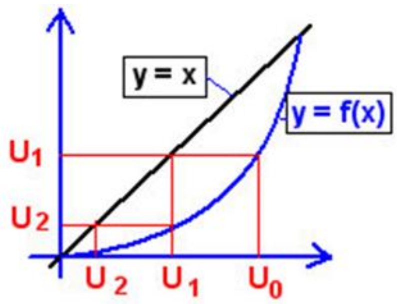
Toutes les fonctions usuelles, polynômes, rationnelles, sinus, cosinus, ainsi que leurs sommes, produits, quotient, composées, sont continues sur leur intervalle de définition .

Une fonction telle que $\frac{1}{x}$ n'étant pas définie en x = 0, on n'a pas à étudier sa continuité en ce point. Elle est continue en tout point de son domaine de définition ℝ - { 0 }.

Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

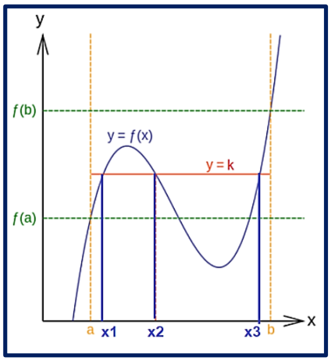
En effet si la fonction f est dérivable sur I c'est que pour a∈I la limite de $\frac{f(a)-f(x)}{a-x}$ quand x →a existe et est finie.
Or (a – x) tendant vers 0, si la limite de f(a) – f(x) n'était pas nulle, la fraction aurait une limite infinie et la fonction ne serait pas dérivable. Donc f(a) – f(x) doit tendre vers 0 et la limite de (fx) quand x → a est f(a) .

Suite définie par récurrence Un+1 = f(Un) avec f continue



Un∈I, f définie et continue sur I et Un+1 = f(Un)
Si lim Un = L alors f(L) = L

Rappel de l'interprétation graphique de la récurrence:
Si Un converge c'est à l'un des points d'intersection de la droite y =x avec le graphe de la fonction.



Théorème des valeurs intermédiaires:

Si f est continue sur [a;b]
Pour tout k compris entre f(a) et f(b)
L'équation f(x) = k a au moins une solution
(3 solutions, x1, x2 , x3 sur notre dessin)
Si de plus f est monotone sur [a;b]
f(x) = k a une solution unique.

Plan d'étude d'une fonction

1) Domaine de définition

Notamment on exclut de **R** les valeurs de X qui annulent un dénominateur ou les valeurs de X qui rendent négative une expression figurant sous une racine.

2) Parité, imparité, périodicité

Une fonction est paire si **f(X) = f(–X).** Graphe symétrique par rapport à l'axe des Y .
Une fonction est impaire si **f(X) = –f(–X)** . Graphe symétrique par rapport à O
Une fonction est périodique s'il existe un nombre P tels que pour tout X, **f(X+P) = f(X)**.
Ces propriétés permettent de restreindre l'étude à $\mathbf{R}^{+}$ ou à une période.

3) Calcul des limites aux bornes du domaine de définition

Voir le chapitre intitulé « limites ».
On détecte notamment l'existence d'asymptotes

Horizontale $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$, verticale $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \pm\infty$ ou oblique $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

L'asymptote oblique a une équation $\mathbf{y = ax + b}$ avec **a** = lim f(x)/x et **b** =lim [f(x) – ax]
a, b et c étant des nombres réels

4) Calcul de la fonction dérivée et étude de son signe (tableau de variation)

L'expression de la fonction dérivée f '(x) nous renseigne sur la dérivabilité de f (x).
L'étude du signe de la dérivée utilise les techniques habituelles, appliquées, le plus souvent, aux polynômes du premier ou du second degré ou aux fractions rationnelles. On en déduit le sens de variation de la fonction, d'une limite du domaine de définition à l'autre, en passant par d'éventuels extremums (minimums ou maximums) quand la dérivée s'annule en changeant de signe.
Si la fonction admet des extremums pour $X=X_1$, $X= X_2$, ...on calculera les valeurs de ces extremums ($f(X_1)$, $f(X_2)$, ...) et on les fera figurer dans le tableau de variation.

5) Continuité

f(x) est continue sur [a,b] si son graphe n'admet pas de discontinuité sur cet intervalle

- f(x) continue sur [a,b] si pour tout nombre c appartenant à cet intervalle $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$
- Si f(x) dérivable sur un intervalle de **R**, f(x) est continue sur cet intervalle
- Si f(x) continue sur [a,b], pour tout nombre k contenu dans cet intervalle l'équation f(x)=k admet au moins une solution

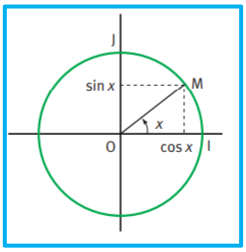
6) Tracé du graphe

On localisera si possible les points où la courbe coupe les axes (f(0) et solutions de f(x) =0). On tracera d'éventuelles asymptotes. Si nécessaire on situera certains points intermédiaires du graphe avec le tracé des tangentes au graphe en ces points. On obtient ainsi une sorte de « coffrage » dans lequel la courbe doit se couler sans heurt ni contradiction.

7) Problème annexes

- Déterminer une équation y = ax + b de tangente au graphe au point P d'abscisse X_0.
  Pour cela on commence par calculer $f(X_0)$ ordonnée de P. Puis on calcule a = f 'X_0).
  puis on calcule b en écrivant que P appartient à la tangente c'est-à-dire $f(X_0) = f'(X_0).X_0 + b$.
- Quelquefois on nous demande d'utiliser le théorème selon lequel si f(X) est continue sur [a,b], la courbe admet entre a et b au moins une tangente de coefficient directeur $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, c'est-à-dire une tangente // à la droite qui relie les points [a,f(a)] et [b,f(b)]
- Déterminer les points d'intersection du graphe de f(x) avec une droite ou une courbe d'équation y=g(x) .
  Pour cela il faut résoudre l'équation f(x) = g(x).
- Position relative des graphes: déterminer si f(x) > g(x) ou le contraire
- Quelquefois on nous demande simplement d'utiliser le théorème selon lequel, si f(x) est monotone et continue sur [a,b], pour tout réel K compris entre f(a) et f(b), l'équation f(x) = K admet une solution et une seule.

Fonctions sinus et cosinus



Soit le cercle trigonométrique (O, 1) associé à un repère orthonormé centré en O.
I est le point de coordonnées (1,0) et J le point de coordonnées (0,1).
Le sens positif d'une rotation sur le cercle est le sens contraire des aiguilles d'une montre.
La circonférence du cercle est 2π, l'aire du disque est π.
La mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ en radians est x, celle de l'arc IM est x, l'aire du secteur circulaire x/2.
Cos x et sin x sont définies comme les coordonnées du point M.
Tout réel y peut être écrit sous la forme x +2kπ avec x ∈] –π , +π] et k ∈ℤ.
Par définition sin (y) = sin (x) et cos (y) = cos(x) .
Ce qui fait que cos(x) et sin(x) sont définies pour tout x ∈ℝ .

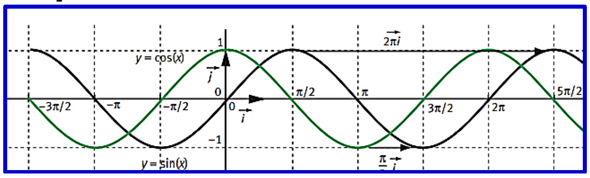
Le domaine de définition de cos(x) et sin(x) est ℝ .
Cos (x) et sin(x) sont continues et à valeurs dans l'intervalle [–1 , +1]
Cos (x) et sin(x) sont périodiques de période 2π. Cos(x) = cos(x+2π) et sin(x)=sin(x+2π)
Cos(x) et sin(x) sont dérivables sur ℝ . **Dérivée de sin(x) = cos(x)**. **Dérivée de cos(x) = –sin(x)**

Tableau de variation pour une période

x	0		π/2		3π/2		2π
y' = cos(x)		+	0	–	0	+	
y = sin(x)	0	↗	1	↘	–1	↗	0

x	0		π		2π
y' = – sin(x)	0	–	0	+	0
y = cos(x)	1	↘	-1	↗	1

Graphe



Des relations très utiles entre certaines lignes trigonométriques:

Sinus et cosinus de l'angle (en vert) en fonction de sin(x) et cos(x).

angle	x	π/2–x	π/2+x	π–x	π+x	–π/2-x	–π/2+x	-x
sinus	Sin x	cos x	cos x	sin x	-sin x	-cos x	-cos x	-sin x
cosinus	Cos x	sin x	-sin x	-cos x	-cos x	-sin x	sin x	Cos x

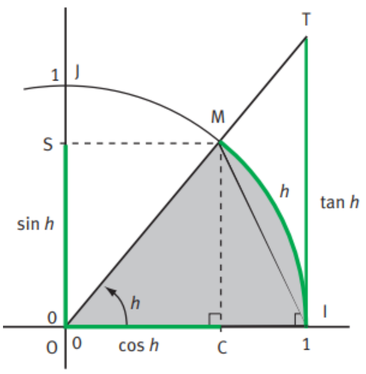
On voit notamment que deux angles x et π–x ont le même sinus
Et deux angles x et –x ont le même cosinus.
En conséquence si on doit résoudre une équation de type
Sin x = 0,5. Les solutions seront {π/6 ; π -π/6} ou mieux {π/6+2kπ ;5π/6+2kπ}
Pour cos x =$\sqrt{2}/2$ les solutions seront {π/4 +2kπ ; –π/4 + 2kπ}

Résoudre certaines équations en cos x ou sin x
Cos x = a (avec a = cos t) a pour solutions {t + 2kπ ; –t + 2kπ}
Sin x = a (avec a = sin t) a pour solutions {t + 2kπ ; π – t + 2kπ}

$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b),$$
$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b),$$
$$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b),$$
$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b).$$

$$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a),$$
$$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(b).$$

Démonstrations autour de la dérivée (intéressantes mais non au programme)



Sur la figure ci-contre, on appelle t l'aire du triangle OIM ($\frac{\sin h}{2}$), T l'aire du triangle OIT ($\frac{\tan h}{2}$), C l'aire du secteur circulaire OIM ($\frac{h}{2}$).
Pour tout M de l'arc IJ on a l'inégalité t < C < T soit $\frac{\sin h}{2} < \frac{h}{2} < \frac{\sin h}{2\cos h}$
ou sin h < h < tan h et en divisant par sin h positif $1 < \frac{h}{\sin h} < \frac{1}{\cos h}$
ou en passant aux inverses cos h < $\frac{\sin h}{h}$ < 1.
Quand h →0, cos h →1. On en déduit (th. des gendarmes) que $\boldsymbol{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1}$.
Le nombre dérivée de sin (x) en x est $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-sin(x)}{h}=\frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h}$
et comme cos(h)→1 et $\frac{\sin(h)}{h}$ →1 cette limite est cos(x) .
Autrement dit **la dérivée de sin(x) est cos(x)** CQFD.
Ensuite comme cos(x) = sin(π/2 – x) il suffit de dériver la fonction composée
On pose U = π/2 – x . La dérivée de sin(U) par rapport à U est cos(U). La dérivée de U par rapport à x est –1.
Donc la dérivée de cos(x) par rapport à x est –cos(U) c'est-à-dire –cos(π/2 –x) et comme cos(π/2–x) =sin(x)
On a **dérivée de cos(x) = –sin(x)** CQFD. Sachant cela $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}$ est le nombre dérivé de cos(x) en 0, soit 0.

Fonction exponentielle

Définition

La fonction exponentielle est la seule fonction définie et dérivable sur ℝ telle f '(x)=f(x) et f(0)=1.

On la note **e^x** ou **exp(x)** et on a donc **$(e^x)' = e^x$** et **$e^0 = 1$**

e irrationnel = 2,718....

Propriétés

Pour tout x ∈ℝ e^x est strictement positif .

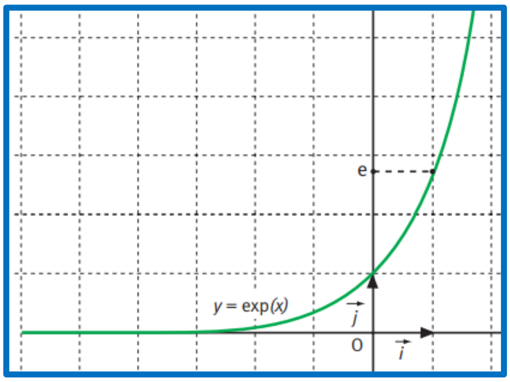
Pour tout (a,b)∈$\mathbb{R}^2$ et pour toute entier n

$e^{(a+b)} = e^a + e^b$	$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$	$e^{(a-b)} = \frac{e^a}{e^b}$	$(e^a)^n = e^{an}$

Graphe et limites

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$y' = e^x$	+
$y = e^x$	0 ↗ $+\infty$

e^x strictement croissante et monotone
Asymptote Horizontale en 0+ pour x ⟶ -∞
Branche infinie pour x ⟶ +∞ .
Coupe l'axe de y en (0 , 1)



$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ On reconnait $\frac{e^{0+x}-e^0}{x}$ dérivée de e(x) pour x = 0 soit 1

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ On démontre $e^x > x^2$ pour x assez grand et on divise par x.

$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ on écrit $xe^x = -\frac{-x}{e^{-x}}$ équivalent à $-\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$

Les 3 dernières limites traduisent le caractère "dominant" de e^x qui l'emporte toujours sur x quand ils ont des influences contradictoires au sein de l'expression où ils figurent.

Equations et inéquations

$e^a = e^b$ équivaut à a = b
$e^a < e^b$ équivaut à a < b
$e^x = k$ avec k >0 équivaut à x = ln (k) ln(x) fonction logarithme népérien $e^{\ln(k)} = k$
$e^{u(x)}$ est la fonction composée e∘U sa dérivée est $u'e^{u(x)}$
La dérivée de $e^{(2x+3)}$ est $2e^{(2x+3)}$

Comparaisons

e^x > x pour tout x

En effet, cela n'est pas à démontrer quand x <0 puisque e^x est positif et x négatif.
Pour x ≥ 0 la dérivée de f(x)= $e^x - x$ est $e^x - 1$ donc positive sur cet intervalle puisque $e^0 - 1$ est =0 et e^x croissante.
f(x) est donc croissante sur cet intervalle et comme f(0)=1 est positif, f(x) est positive pour x ≥ 0 donc $e^x > x$.

$e^x > x^n$ pour x assez grand

On vient de démontrer que $e^{\frac{x}{n+1}} > \frac{x}{n+1}$ en élevant à la puissance n+1 $e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$ ou $e^x > x^n \frac{x}{(n+1)^{n+1}}$
Il suffit de prendre $x > (n+1)^{n+1}$ pour que la fraction devienne > 1 et que l'on ait $e^x > x^n$. CQFD
On a aussi $\frac{e^x}{x^n}$ > Kx ce qui prouve que

Quand x ⟶ +∞ Lim $\frac{e^x}{x^n}$ = +∞ et on en tire que **Quand x ⟶ – ∞ Lim $e^x x^n = 0$**

Fonction logarithme népérien

Soit f: une bijection de A dans f(A). La bijection réciproque f^{-1} est telle que fof^{-1} = I (où I est l'identité qui à x → x).
En d'autres termes fof^{-1} (x) = x   et   si y =f(x) alors x = f^{-1}(y).
Or e^x étant définie sur ℝ, à valeurs strictement positives, croissante et monotone c'est une bijection de ℝ dans]0 ; +∞ [

Définition:

La fonction réciproque de x→e^x est x→ln(x), dont le nom est logarithme népérien de x.
Son domaine de définition est]0 ; +∞ [et elle est à valeurs dans ℝ .

Si Ln(x) est une bijection elle doit être monotone strictement croissante ou décroissante.

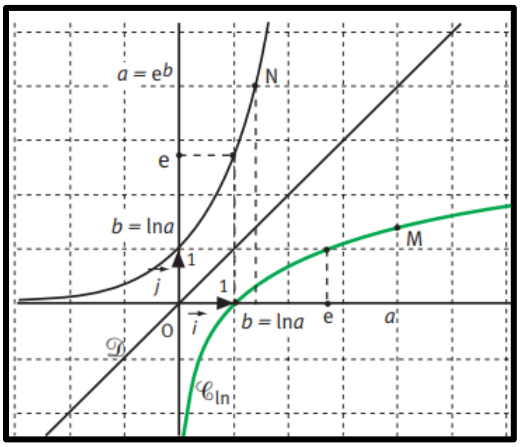
Propriétés tirées de la définition

ln(1) =0	**ln(e)=1**	**ln(x) est strictement croissante**	
ln(e^a) =a	**$e^{\ln(a)}$= a**	**a =ln(b) équivalent à b =e^a**	
ln(ab) = ln(a)+ln(b)	Formule fondamentale tirée de $e^{\ln(a)+\ln(b)}=e^{\ln(a)}e^{\ln(b)}$ =ab = $e^{\ln(ab)}$		
ln(a^n) = n ln(a)	**ln(1/a)=– ln(a)**	**ln(a/b)=ln(a)–ln(b)**	**ln($\sqrt{a}$)=1/2 ln(a)**
lim $_{x\to 0+}$ ln(x) = – ∞	**lim $_{x\to +\infty}$ ln(x) = + ∞**	Tiré de la réciprocité et de $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0^+$ et $\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$	
quand x → 0+ x ln (x) → **0**	quand x → 0 $\frac{\ln(1+x)}{x} \to$ **1**	quand x → 1 $\frac{\ln(x)}{x-1} \to$ **1**	quand x →+∞ $\frac{\ln(x)}{x} \to$ **0**

Dérivée

$\frac{\ln(a+h)-\ln(a)}{h} = \frac{\ln(\frac{a+h}{a})}{h} = \frac{\ln(1+\frac{h}{a})}{h}$ = en divisant numérateur et dénominateur par a = $\frac{1}{a}\frac{\ln(1+\frac{h}{a})}{\frac{h}{a}} = \frac{1}{a}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{a}\right)-\ln(1)}{\frac{h}{a}}$
Et si on admet que le nombre dérivé de ln en 1 est 1 quand h → 0 le nombre dérivé de ln(x) en a est $\frac{1}{a}$.
Autrement dit **La fonction dérivée de ln(x) est** $\frac{1}{x}$.   ln(x) est dérivable sur son domaine de définition.

Graphe



Le graphe de f^{-1} est le symétrique de celui de f par rapport à la droite y=x.
Puisque si le point (x,y) ∈ au graphe de f , le point (y,x) ∈ au graphe de f^{-1}.
On voit ici le graphe de y= e^x en noir et celui de y =ln(x) en vert.
En tant que graphes de fonctions réciproques, ils sont symétriques par rapport à la droite y=x.
On note que
ln(x) est strictement croissante et monotone.
Elle admet comme asymptote verticale la droite x=0.
Elle coupe l'axe des x en (1,0) puisque ln(1)=0.
Elle a – ∞ comme limite en 0+ et +∞ comme limite en +∞.
Mais pour tout x on voit que ln(x) < x .
Notons que les tangentes en 2 points symétriques doivent se couper au même point sur l'axe y=x. Et comme la tangente au graphe de e^x en (0,1) est // à la droite y=x, il en va de même pour la tangente en (1,0) au graphe de ln(x) et le nombre dérivé de ln(x) en 1 est bien 1.

Equation inéquations

Pour ax+b positif	**ln(ax+b) =k**	implique **ax + b = e^k**	d'où on tire la valeur de x
Pour k positif,	**e^{ax+b} = k**	implique **ax+b =ln(k)**	d'où on tire la valeur de x
	ln (a) < ln(b)	implique **a < b**	
Pour x positif	**ln(x) > k**	implique **x > e^k**	
Pour k positif	**e^x > k**	implique **x > ln(k)**	

Fonction composée

ln(U(x) a pour dérivée $\frac{U'(x)}{U(x)}$

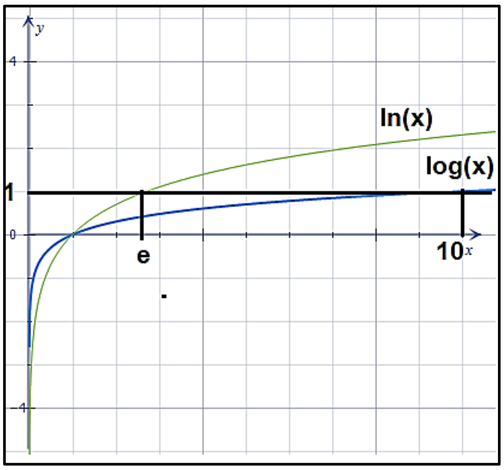
Fonction logarithme décimal

Définition

La fonction logarithme décimal (notée log) est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

log(x) =ln(x) multiplié par une constante 1/ln(10).

Donc la dérivée de log(x) est $\dfrac{1}{x\,ln(10)}$



ln(10) voisin de 2,30
Donc la valeur absolue de log(x) est 2.3 fois plus petite que celle de ln(x)

On voit ici les graphes de log(x) et de ln(x) .
Les 2 fonctions ont le même zéro ln(1)=log(1)= 0.
Pour x > 1 les 2 fonctions sont positives et le rapport de leurs valeurs absolues fait que ln(x) est au-dessus de log(x)
Pour x <1 les 2 fonctions étant négatives, c'est celle qui a la plus faible valeur absolue (log(x)) qui domine l'autre.

Propriété

Pour tous réels a, b de $]0\,;+\infty[$ et n de $\mathbb{Z}$, on a :

$\log(ab) = \log a + \log b$; $\quad \log\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\log a$;

$\log\left(\dfrac{b}{a}\right) = \log b - \log a$; $\quad \log\left(a^n\right) = n\log a$;

$\log\left(10^n\right) = n$; $\quad \log\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\log a$.

Les propriétés sont exactement les mêmes que celles de ln(x) sauf que c'est log(10) et non log(e) qui est égal à 1 .
Et donc $\log(10)^n$ =n alors qu'on avait $\ln(e)^n$ =n.

Dans ce qui suit (Ex) est la fonction partie entière de x : E(25,236) = 25

Propriété

Soient x un réel strictement positif et $x = p\times 10^k$ l'écriture scientifique de ce nombre ($p \in [1;10[$, $k\in\mathbb{Z}$).
Alors :

- $k = \mathrm{E}(\log x)$;
- $x = p\times 10^{\mathrm{E}(\log x)}$;
- $10^{\mathrm{E}(\log x)} \le x < 10^{\mathrm{E}(\log x)+1}$.

Si x est un nombre entier naturel non nul, le nombre de chiffres de l'écriture décimale de x est égal à $\mathrm{E}(\log x)+1$.

Inversement, soit x un nombre entier naturel non nul, alors $\mathrm{E}(\log x) = n-1$ et $n-1 \le \log x < n$.

En chimie

Définition

Le pH d'une solution aqueuse est égal à : $\mathrm{pH} = -\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est la concentration de la solution en ions H_3O^+ (en $\mathrm{mol.L^{-1}}$).

Encadrés empruntés au site de l'Académie en ligne.