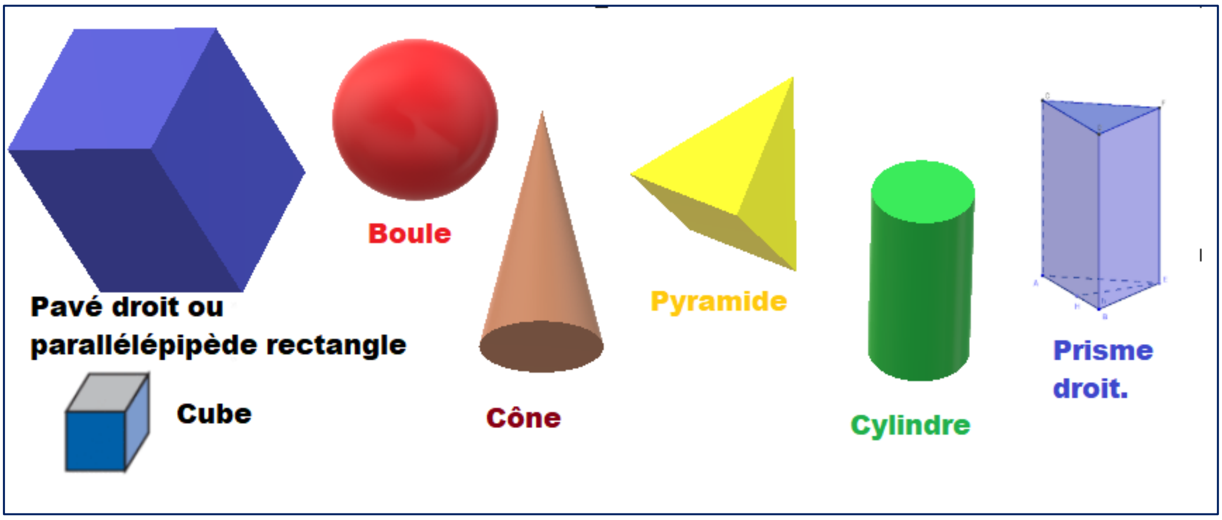
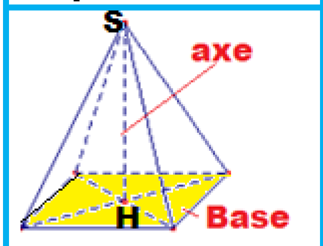
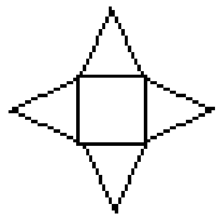
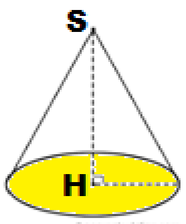
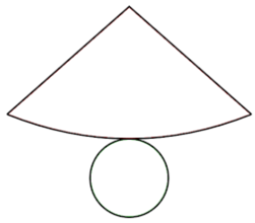
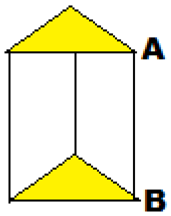
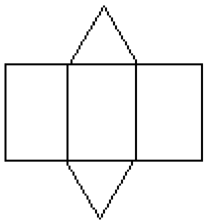
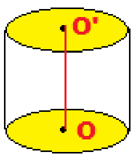
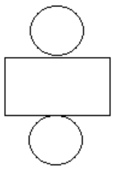
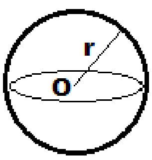
Géométrie
Figures dans l'espace

Table des matières

Les solides usuels dans l'espace

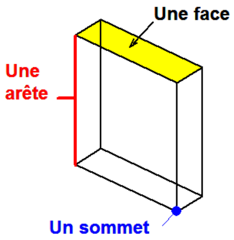


Apprenez à reconnaître et à décrire les solides usuels qu'on voit sur cette figure.
Certains présentent à la vue des surfaces planes qu'on appelle **faces**.
Le pavé droit et le cube ont toujours 8 faces, le cylindre 2, le cône 1, la boule 0
Le nombre de faces du prisme et de la pyramide dépend de leur configuration.
La ligne droite d'intersection de 2 faces s'appelle une **arête**. Pavé, cube, pyramide, prisme ont des arêtes.
Les points d'intersection de 3 arêtes, le "pointu" du cône ou de la pyramide s'appellent des **sommets**.
Le patron d'un solide est une figure géométrique plane qui correctement repliée reconstitue le solide.

Aspect du solide	Description	Patron
	Ici **la pyramide** a une base carrée mais elle pourrait avoir la forme de n'importe quel polygone (triangle, pentagone, hexagone …). Ses faces latérales sont des triangles. La droite(SH) est perpendiculaire à la base et la longueur du segment SH est la hauteur de la pyramide.	
	**Le cône** ressemble à la pyramide sauf qu'il a une base circulaire et que sa surface latérale ne comporte ni face, ni arête. Là encore la droite (SH) est perpendiculaire à la base et SH est la hauteur du cône mais le point H est confondu avec O le centre du disque de base. La base d'une pyramide n'a un centre que si elle est formée d'un polygone régulier (c'est à dire dont tous les côtés sont égaux).	
	**Le prisme droit.** Sa base est formée d'un polygone quelconque triangle, quadrilatère, pentagone, hexagone,… Il n'est droit que si ses bases sont parallèles et si ses faces latérales sont des rectangles. Dans ce cas toutes les arêtes qui comme AB joignent les 2 bases sont de longueur égale, elles sont perpendiculaires aux bases et égales à la hauteur du prisme.	
	**Le cylindre droit** ressemble au prisme droit. Ses bases sont des disques et la droite (OO') qui joint les centres des disques leur est perpendiculaire. OO' est la hauteur du cylindre.	
	**La boule** ne ressemble à aucun autre solide. La boule est un volume, son enveloppe s'appelle "la sphère". La sphère est le lieu des points de l'espace qui sont à la même distance r d'un point O appelé centre. La boule n'a ni face, ni arête, ni patron.	

Le parallélépipède rectangle ou pavé droit

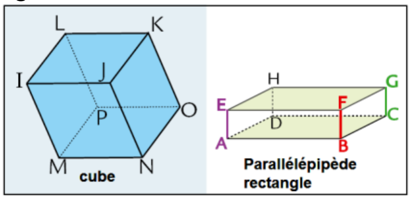
Vocabulaire de description et propriétés du parallélépipède rectangle.



Lorsque la surface extérieure du solide est constituée de surfaces planes, ces dernières forment **les faces** du solide.
Si de plus les faces sont des polygones, leurs côtés forment **les arêtes** du solide et leurs sommets forment **les sommets** du solide.
Un parallélépipède rectangle a 8 sommets, 6 faces, 12 arêtes.
Ses faces sont parallèles 2 à 2.   2 faces parallèles sont dites **opposées**.
De chaque sommet partent 3 arêtes qui sont **perpendiculaires** les unes aux autres.
Les arêtes sont aussi parallèles 4 à 4.

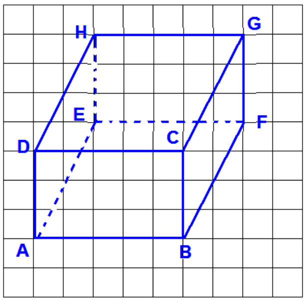
Conventions

Un **parallélépipède rectangle** est aussi appelé "**pavé droit**"
Un cube est un pavé droit dont toutes les faces sont des carrés. Toutes ses arêtes sont donc de longueur égale.



Pour nommer un pavé droit, on choisit une face et un sens (par exemple le sens des aiguilles d'une montre). On imagine qu'on est devant cette face et qu'on voit la face opposée par transparence. On nomme les 4 sommets de la 1ere face par ordre alphabétique A,B,C, D en tournant dans le sens choisi, et les sommets de la face opposée qui se superposent par transparence seront appelés dans l'ordre EFGH, en tournant dans le même sens (A étant superposé à E, B à F, C à G, D à H).

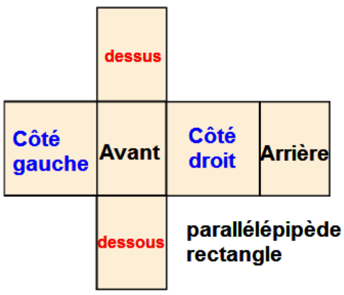
Perspective cavalière

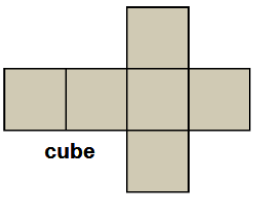


Dans l'espace, pour représenter les solides comme on les voit, on utilise la **perspective cavalière** dont les règles sont les suivantes:
1) on choisit une face avant devant laquelle on se tient (par exemple ABCD).
2) face avant (ABCD) et face arrière (EFGH) sont représentées comme des <u>rectangles de mêmes dimensions</u> décalés vers le haut (ou le bas) et la droite (ou la gauche). On les dessine comme tels.
3) Ensuite on représente les arêtes qui relient les sommets correspondants de la face avant et de la face arrière. Elles doivent être parallèles et de même longueur.
4) éventuellement on dessine les arêtes cachées en pointillés.

Patrons de parallélépipèdes

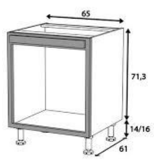
Le patron d'un parallélépipède est formé de ses 6 faces mise à plat et solidaires les unes des autres. Il faut disposer ces faces de telle sorte que si on découpe le patron et qu'on le plie convenablement on peut recomposer le solide tel qu'il est dans la réalité ou sa maquette à l'échelle.





Pour construire un patron, le plus simple est de choisir une face avant que l'on dessine en respectant ses dimensions. On lui rajoute la face droite à droite, la face à gauche à gauche, la face de dessus au dessus et la face de dessous au dessous <u>en faisant coïncider les arêtes de même dimension</u>.
Ensuite on peut rattacher la face arrière où on veut, <u>à condition que ce soit sur une arête libre de même dimension qu'une arête de la face arrière</u>.
On pourrait également coucher la face du dessus sur le côté gauche ou le côté droit. En bref il y a beaucoup de patrons possibles. Encore plus pour le cube dont toutes les faces sont identiques.

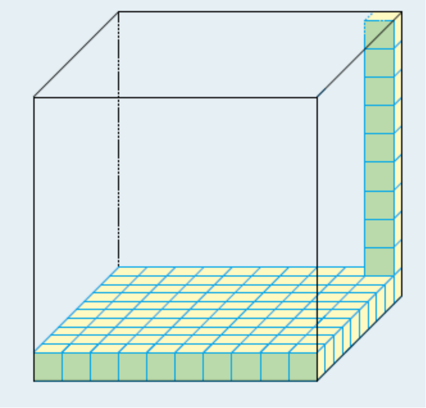
Dimensions d'un parallélépipède



On les appelle longueur, largeur, hauteur ou largeur, profondeur, hauteur.
On les trouve le plus souvent sous la forme L x l x H. Par exemple 65 x 61 x 71 en cm.
En mathématiques n'importe quelle face du parallélépipède peut être prise pour base et la longueur de toute arrête perpendiculaire à la base en constitue alors la hauteur.
Mais en ce qui concerne les objets de la vie réelle, on a tendance à considérer que leur base est la face sur laquelle ils reposent et leur profondeur est l'arête qui nous éloigne de leur face la plus proche.

Volumes

Unités de mesure des volumes



On appelle mètre cube (1 m^3) l'espace occupé par un cube de 1m de côté.
1 décimètre cube (1dm^3) est l'espace occupé par un cube de 1dm de côté et selon le même principe on peut définir les multiples et sous multiples du m^3 qui figurent dans le tableau ci-dessous ainsi que leur correspondance avec quelques unités de capacité usuelles:

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
			10 hl	1 litre	10cl	
1000000000	1000000	1000	1	1/1000	1/1000000	1/1000000000

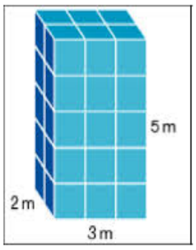
Dans la dernière ligne on trouve la valeur de l'unité en m^3 (3, 6, 9 zéros)

Supposons que les dimensions d'un petit cube du dessin ci-contre soient 1m x 1m x 1m . Son volume est donc 1m^3.
Le grand cube contient 10 petits cubes dans toutes ses dimensions.
Donc ses dimensions sont 10m x 10m x10m
Autrement dit 1dam x 1dam x1dam.
Son volume est donc 1dam^3, unité immédiatement supérieure au m^3. Combien de m^3 dans un dam^3?
Il suffit de les compter. La couche inférieure qui est représentée compte 10 x 10 = 100 petits cubes.
Et le grand cube empile 10 couches semblables soit 1000 petits cubes en tout.
On en déduit que 1dam^3 = 1000 m^3.
Et il en va de même pour toutes les unités de notre table. Si 2 unités se suivent, celle de gauche est 1000 fois plus grande que celle de droite. Par exemple 1 m^3 = 1000 dm^3 = 1000 litres. 1dm^3 = 1000 cm^3. etc.

2 Unités consécutives de mesure des longueurs sont 10 fois plus grandes ou plus petites.
2 Unités consécutives de mesure des aires sont 100 fois plus grandes ou plus petites.
2 Unités consécutive de mesure des volumes sont 1000 fois plus grandes ou plus petites.

Volume du parallélépipède rectangle

On dit que des unités de mesure de longueur, d'aire, de volume sont compatibles quand elles correspondent au même multiple ou sous multiple de l'unité principale:
m, m^2, m^3 sont compatibles, ainsi que cm, cm^2, cm^3 mais par exemple dm , m^2 , m^3 sont incompatibles.



Soit un parallélépipède rectangle dont les dimensions en m sont 3x2x5. On peut considérer que la face sur laquelle il repose constitue sa **base**, la dimension de l'arête perpendiculaire à la base constituant sa **hauteur**.
Notre solide a donc une base de 3x 2 = 6m^2 et une hauteur de 5m.
Sur chaque m^2 de la base on peut mettre 1 pavé de 1m^3 et on obtiendra ainsi une première couche de pavés de 3 x 2 m^3 qu'il faudra multiplier par 5 pour recouvrir toute la hauteur.

Si les dimensions du parallélépipède sont 3m, par 2m , par 5m son volume est donc 3 x 2 x 5 = 30 m^3.
Autrement dit, si B est l'aire de la base et h la hauteur du parallélépipède rectangle, exprimée en unités compatibles, son volume est

V = B x h

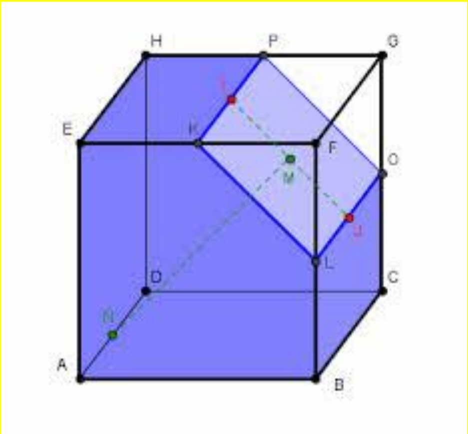
V étant exprimé en unités compatibles avec B et h.
Et si a, b, c sont ses dimensions dans la même unité de longueur, on peut dire aussi que

V = a x b x c

V étant mesuré dans l'unité de mesure de volume compatible.

Problèmes

Quand on sait calculer le volume d'un parallélépipède rectangle, on sait, bien sûr, calculer les volumes de parallélépipèdes auxquels il manque une moitié de cube ou de parallélépipède et les volumes de solides complexes qui sont des empilements de cubes ou de parallélépipèdes.
À condition d'avoir toutes les dimensions utiles.



Par exemple, ici si on sait que l'arête du cube ABCDEFGH a une longueur de 10m et que KF=FL=PG=GO = 5m .
On en déduit que le morceau enlevé au cube (qui est un prisme droit) est la moitié d'un parallélépipède de dimensions 10 x 5 x 5 .
Donc le volume du prisme enlevé est la moitié de 10 x 5 x 5 soit 125 m^3.
Comme le volume du grand cube est 10 x 10 x 10 = 1000 m^3.
On en déduit que le volume du grand cube amputé du prisme est 1000 – 125 = 875 m^3.

Voici un exemple de problème emprunté au site maths.pdf.fr