Suites

Table des matières

Suites : notions fondamentales

En classe de première:

On a défini une suite et ses deux modes de construction

- Terme général défini de façon explicite Un=f(n)
- Construction par récurrence Un+1 = f(Un) , U0 étant donné.

On a défini quelques propriétés utiles pour caractériser les suites

(Un) croissante	Si pour tout n, $U_{n+1} > U_n$ ou $U_{n+1} - U_n > 0$
(Un) décroissante	Si pour tout n $U_{n+1} < U_n$ ou $U_{n+1} - U_n < 0$
(Un) monotone	(Un) est strictement croissante ou décroissante pour tout n
(Un) stationnaire	Si pour tout n à partir d'un certain rang $U_{n+1} = U_n$
(Un) alternée	Si pour tout n U_{n+1} et U_n sont de signes contraires
(Un) périodique	∃p tel que pour tout n $U_{n+p} = U_n$
(Un) et (Vn) adjacentes	si leurs sens de variation sont différents et Un –Vn →0 quand n →∞
(Un) minorée	∃m tel que tout n Un ≥ m
(Un) majorée	∃M tel que tout n Un ≤ M
(Un) bornée	Si (Un) est à la fois majorée et minorée

On a évoqué la notion de limite et son lien avec la convergence ou la divergence d'une suite

(Un) est convergente si Un tend vers une limite finie L quand n ➜ ∞

- Lim Un = L si quel que soit ε > 0 et aussi petit que l'on veut l'inéquation |Un – L|< ε admet une solution de type n>N (N étant un rang fonction de ε).

(Un) est divergente si elle ne converge pas. En particulier une suite telle que lim (Un) = ±∞ diverge

- Un →+∞ si tout μ>0 (aussi grand que l'on veut), l'inéquation Un > μ a une solution de type n>N avec N fonction de μ.
- Un→ –∞ si tout μ <0 (aussi petit que l'on veut), l'inéquation Un < μ a une solution de type n>N avec N fonction de μ.

On a évoqué d'autres moyens de tester la convergence ou la divergence d'une suite

- Si Un est croissante et majorée ou décroissante et minorée, alors Un converge.
  Mais une suite peut être bornée sans être convergente (par exemple Cos(n))
- Si Un = f(n) et que f(x) admet une limite L quand x → +∞ , alors Un a pour limite L
- si U_n = f(n) et si quand x ➜ ∞ lim f(x)= ∞ alors lim U_n = ∞
- On peut aussi comparer une suite à une suite de référence que l'on sait convergente ou divergente

Des familles de suites de références que l'on sait convergentes de limite 0 :

$U_n = n^{-k}$ (avec k > 0). (Par exemple $\frac{1}{n^2}$ ou $\frac{1}{\sqrt{n}}$)

$U_n = k^{-n}$ avec k >1 (Par exemple $\frac{1}{2^n}$)

$U_n = k^n$ (avec –1< k < 1) (Par exemple $(0,9)^n$ ou $(-\frac{7}{8})^n$)

Des familles de suites de références que l'on sait divergentes

$Un = n^k$ avec k > 0 (Par exemple **n**, $\mathbf{n^2}$ ou $\sqrt{n}$)

$Un = k^n$ avec k > 1 (Par exemple 2^n)

On a étudié plus particulièrement 2 familles de suites

Les suites arithmétiques

Un+1 = Un +R (R est un nombre réel appelé raison) Sn=U0 +U1+…+Un = $\frac{n(U_0+U_{n-1})}{2}$

Les suites géométriques

Un+1 = Q.Un (Q est un réel appelé raison) Sn=U0 +U1+…+Un = $U_0\frac{Q^n-1}{Q-1}$

On a vu comment interpréter graphiquement la convergence d'une suite Un+1=f(Un)

L'utilisation de la récurrence

Pour démontrer qu'une propriété dépendant d'un entier naturel est vraie pour tout entier à partir d'un certain rang
Il suffit de démontrer
a) Qu'elle est vraie au premier rang où la question se pose
b) Que si elle est vraie au rang n alors elle est vraie au rang n+1

Démontrer la transmission de la propriété du rang n au rang n+1 revient à démontrer son caractère "héréditaire"
Si elle est vraie pour le rang n_0 et que le rang suivant en hérite, puis le rang suivant, etc. Alors elle est vraie pour tous les rangs supérieurs ou égaux à n_0.

Exemple 1.
Soit (Un) définie par U0 = 2 et Un+1 = 2Un – 3 .
Démontrer que pour n ≥ 0 Un = 3 – 2^n

Démontrer P vraie au rang 1	Supposer P vraie au rang n	Démontrer si $U_n = 3 - 2^n$ alors $U_{n+1} = 3 - 2^{n+1}$
$U_1 = 2U_0 - 3$ donne $U_1 = 1$ $U_1 = 3 - 2^1$ donne $U_1 = 1$ Propriété vraie au rang 1	$U_n = 3 - 2^n$ vraie	L'énoncé nous autorise à écrire $U_{n+1} = 2U_n - 3$ $U_{n+1} = 2(3-2^n) - 3 = 6 - 2^{n+1} - 3 = 3 - 2^{n+1}$ CQFD

Exemple 2
Démontrer que la proposition "10^n – 1 est un multiple de 9" est héréditaire.
Supposons que $10^n - 1$ soit un multiple de 9… Il faut démontrer que dans ce cas $10^{n+1} - 1$ est un multiple de 9.
On peut utiliser la propriété suivante: si x est un multiple de 9, si k est un entier non nul, alors kx est un multiple de 9 et kx + 9 est aussi un multiple de 9. En prenant $x = 10^n - 1$ et k =10 la démonstration est immédiate.

Mais il est souvent utile de partir d'une équation et de la modifier selon les règles qu'on connait
Par quelle équation écrit –on que $10^n - 1$ est un multiple de 9? $10^n - 1 = 9m$ avec m entier non nul
Que peut –on faire à cette équation pour se rapprocher de celle qu'il faut démontrer ?
La multiplier par 10 : $10^{n+1} - 10 = 90m$
Pour se rapprocher encore on ajoute 9 aux deux membres
$10^{n+1} - 10 + 9 = 90m + 9$ ou $10^{n+1} - 1 = 9(10m + 1)$ et si le second membre est bien divisible par 9 le premier aussi.

A partir de quel rang la proposition est-elle vraie?
Elle n'est pas vraie pour le rang 0 puisque $10^0 - 1 = 0$ mais elle est vraie à partir du rang 1 puisque $10^1 - 1 = 9$

Remarque: chaque fois que c'est possible, il faut exploiter
l'équation (ou l'inéquation) supposant vraie la propriété au rang n et la modifier dans le respect des règles mathématiques…
- soit à l'aide d'une relation de récurrence autorisée par l'énoncé (exemple 1)
- soit en appliquant les règles opératoires sur les équations ou inéquations que vous maitrisez (exemple 2)

…pour déboucher sur l'équation (ou l'inéquation) qui établit la vérité de la propriété au rang n+1.

Exemple 3
$U_0 = 10$ et $U_{n+1} = \sqrt{Un + 6}$ démontrer que pour n≥ 0 on a $3 \le U_n \le 10$ (Un) bornée

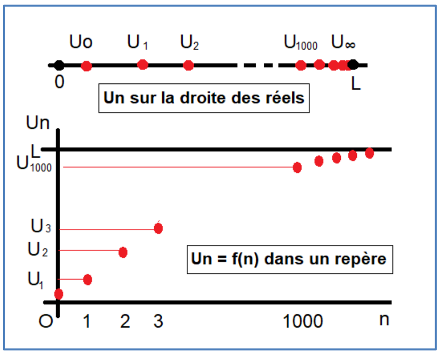
Démonter P vraie au rang 1	Supposer P vraie au rang n	Démontrer que si $3 \le Un \le 10$ alors $3 \le U_{n+1} \le 10$
$U_1 = \sqrt{10+6} = 4$ U_1 entre 3 et 10. P vraie	$3 \le U_n \le 10$	$3 \le Un \le 10$ donc $3+6 \le Un+6 \le 10+6$ ou $9 \le (U_{n+1})^2 \le 16$ On en déduit $3 \le U_{n+1} \le 4$ et a fortiori $3 \le U_{n+1} \le 10$ CQFD

Exemple 4
$U_0 = 10$ et $U_{n+1} = \sqrt{Un + 6}$ démontrer que pour n≥ 0 la suite (Un) est décroissante

Démonter P vraie au rang 1	Supposer P vraie au rang n	Démontrer que si $U_{n+1} < U_n$ alors $U_{n+2} < U_{n+1}$
$U_1 = \sqrt{10+6} = 4$, $U_0 = 10$ $U_1 < U_0$. P vraie	$U_{n+1} < U_n$	$U_{n+1} < U_n$ donc $U_{n+1} + 6 < U_n + 6$ et $\sqrt{U_{n+1}+6} < \sqrt{U_n+6}$ Autrement dit $U_{n+2} < U_{n+1}$ CQFD

Convergence d'une suite

■ On dit qu'une suite (Un) **admet un réel L pour limite** quand n → ∞ si pour tout nombre positif ϵ aussi petit que l'on veut, il existe un rang N tel que pour tout n > N on ait |Un –L| < ε.
■ Si elle existe, cette limite L est forcément unique.
■ Une suite est dite **convergente** quand elle admet une limite finie L quand n → ∞ .
■ Dans le cas contraire elle est dite **divergente**.



Quand on représente graphiquement une série (Un) qui tend vers une limite L,

■ Sur la droite des réels, à partir d'un certain rang on observe une agglomération des termes autour du point d'abscisse L de telle sorte que quel que soit son rayon ε, il existe un rang N tel que l'intervalle]L-ε; L +ε [contient tous les termes de (Un) pour n > N.
Tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de (Un) pour n > N.

■ Dans un repère où l'on représente la suite comme une fonction de n (n en abscisse, Un en ordonnée) les points de coordonnées (n,Un) se rapprochent de plus en plus de la droite d'équation y = L, au fur et à mesure que n → ∞

Opérations sur les limites et conséquences de la comparaison de suites

Si Un → Lu et Vn → Lv quand n → ∞
- **La suite Un + vn →Lu + Lv**
- **La suite Un.Vn → Lu.Lv**
- **Si Vn≠0 pour tout n et Lv ≠ 0 alors $\frac{Un}{Vn} \to \frac{Lu}{Lv}$**
- **Si λ est un réel la suite λUn → λLu**

Si à partir d'un certain rang Un ≤ Vn
- **Lu ≤ Lv**

Si à partir d'un certain rang Un ≤ Wn ≤ Vn , et Lu = Lv =L
- **Lim (Wn) = L (théorème des gendarmes)**

■ On dit qu'une suite (Un) **admet +∞ pour limite** quand n → ∞ si pour tout nombre positif A aussi grand que l'on veut, il existe un rang N tel que pour tout n > N on ait Un > A
■ On dit qu'une suite (Un) **admet –∞ pour limite** quand n → ∞ si pour tout nombre négatif A aussi petit que l'on veut, il existe un rang N tel que pour tout n > N on ait Un < A
■ Quand une suite → ±∞ on dit qu'elle **diverge**.

Limite de l'inverse d'une suite

	Limite de Un				
	–∞	0+	0–	Lu≠0	-∞
Limite de $\frac{1}{Un}$	0-	+∞	–∞	$\frac{1}{Lu}$	0+

Remarquons que lorsque Un → 0
il faut distinguer si Un → 0 par valeurs positives (→0+) ou négatives (→0–) car selon le cas, l'inverse de Un tend vers + ∞ ou –∞
De même selon que Un →+∞ ou –∞ l'inverse de Un → 0+ ou 0–.

On tire de ce tableau les conséquences logiques pour la limite de $\frac{Un}{Vn} = Un.\frac{1}{Vn}$ selon les limites de Un et Vn.

Comparaison de suites

Soit 2 suites telles que Un ≤ Vn à partir d'un certain rang
Si Lim (Un) = +∞ alors Lim (Vn) = +∞
Si Lim (Vn) = –∞ alors Lim (Un) = –∞

Cas des suites géométriques de la forme Un = Q^n

■ Si Q > 1	Un divergente et Lim (Un) = + ∞
■ Si Q = 1	Un stationnaire = 1
■ Si Q ∈]–1 ; +1[	Un convergente et Lim (Un) = 0
■ Si Q ≤ –1	Un divergente et n'a pas de limite (inversion de signe selon n pair ou n impair)

Cas de suites monotones

Un croissante non majorée ⟹ Lim (Un) =+∞	Un croissante majorée ⟹ Lim (Un)=L
Un décroissante non minorée ⟹ Lim (Un) =–∞	Un décroissante et minorée ⟹ Lim (Un) =L

Approche technique des suites

Pour établir qu'une suite Un tend vers une limite connue L, il faut établir que quel que soit le nombre ε (positif aussi petit qu'on veut) l'inéquation |L– Un| < ε a une solution de type n > N, N étant positif, fonction de L et de ε.

Par exemple, si on veut démontrer que Lim $\frac{1}{n^2}$ = 0 , il faut résoudre l'inéquation | $\frac{1}{n^2}$ – 0| < ε autrement dit $\frac{1}{n^2}$ < ε

Ce qui donne $n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$ ou $n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ la solution est bien du type n > N (N positif) donc la limite de la suite est bien 0.

Exemple si on prend ε=0,01 il suffira de prendre n >10 pour que Un soit compris entre 0 et 0,01
Si on prend ε =0,0001, il suffira de prendre n > 100 pour que Un soit compris entre 0 et 0,0001. Etc ..

Un →+∞ équivaut à: tout L positif Un > L a une solution de type n > N (N positif fonction de L)
Un → –∞ équivaut à: tout L négatif Un < L a une solution de type n > N (N positif fonction de L)

Par exemple pour démontrer que Lim(n^2) = +∞ il faut résoudre n^2 > L (L positif) ce qui donne $n > \sqrt{L}$. CQFD

Si une suite a la forme d'un polynôme en n, (éventuellement avec addition de termes de degré négatif) il suffit de mettre en facteur son terme de plus haut degré pour montrer que sa limite est celle de son terme de plus haut degré.
Corollaire: Si une suite a la forme d'une fraction rationnelle en n, quand n → ∞ elle se comporte comme le quotient du terme de plus haut degré de son numérateur par le terme de plus haut degré de son dénominateur.

1. $Un = An^3 + Bn + \frac{C}{n} = An^3 \left(1 + \frac{B}{An^2} + \frac{C}{n^3}\right)$ et quand n → ∞ le second facteur → 1 ce qui fait que
Un se comporte comme An^3.
Lim Un dépend du signe de A quand on fait tendre n vers ± ∞. Par exemple si A <0 , Un →+∞ quand n → –∞

2. De même $Un = \frac{1-3n^2}{(n+1)(n-2)}$ va se comporter comme $\frac{-3n^2}{n^2}$ quand n tendra vers ±∞. Autrement dit Lim (Un) = –3.

3. $Un = (2\ n)\cos(n) - n^2$
(2 n)cos(n) n'ayant pas de limite on ne peut utiliser directement les opérations sur les limites. Mais en mettant n^2 en facteur.. $Un = n^2 \left(\frac{2\cos(n)}{n} - 1\right)$. 2cos(n)∈[–1 ; +1] donc la fraction tend vers 0 et Un se comporte comme $-n^2$. Un → –∞

Si une suite est une somme de termes dans lesquels on ne trouve n que dans les exposants, pour trouver sa limite, on a souvent intérêt à mettre en facteur soit le terme de plus haut degré, soit le terme le plus grand.
On désigne terme le plus grand ou terme de plus haut degré sous l'appellation générique de "terme dominant"

4. $Un = 2^n + 2^{n+2} - 2^{n+3} = 2^{n+3}(2^{-3} + 2^{-1} - 1) = 2^{n+3}\left(-\frac{5}{8}\right)$
Lim (Un) = –∞ quand n →+∞
Lim (Un) = 0 – quand n → –∞

5. $Un = 3^n - 7^n = 7^n \left[\left(\frac{3}{7}\right)^n - 1 \right]$
$\left[\left(\frac{3}{7}\right)^n - 1 \right]$ → –1 quand n →+∞ donc Un → –∞
$\left[\left(\frac{3}{7}\right)^n - 1 \right]$ →+∞ quand n → –∞ donc Un → +∞

Pour borner une somme, il est souvent utile d'en borner tous les termes et d'en compter le nombre.
Pour établir le sens de variation d'une suite il faut souvent exprimer Un+1 en fonction de Un.

6. Etudier la convergence de $U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ pour n ≥ 1.
Un est une somme de n termes tous inférieurs à 1/n donc Un < 1.
Un est positive donc 0 < Un < 1. Un est bornée.

$$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

Donc $Un+1 = Un - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$
Comme chacun des nombres $\frac{1}{2n+1}$ *et* $\frac{1}{2n+2}$ est supérieur ou égal à la moitié de $\frac{1}{n+1}$, leur somme est supérieure à $\frac{1}{n+1}$.
Un+1 = Un +k (k positif) donc Un est croissante et majorée donc convergente de limite comprise entre 0 et 1.