

# Techniques de base

## Table des matières

Techniques calculatoires acquises .....	2
Un peu de logique .....	3
Polynômes et fonctions rationnelles .....	4
Valeurs absolues .....	5

# Techniques calculatoires acquises

A la fin de la seconde on est sensé maîtriser:

Certaines conventions d'écriture

Notamment les conventions les plus courantes liées à la théorie des ensembles

On n'utilise plus le signe  $\times$  mais des parenthèses pour séparer les facteurs dans les produits.

Les techniques de développement, de factorisation, de réduction des expressions algébriques.

La résolution des équations et inéquations du premier degré de toutes formes.

La résolution des équations et inéquations du second degré (premier stade).

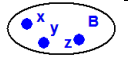





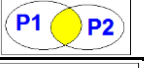



La résolution des systèmes d'équations du premier degré à  $n$  inconnues ( $n \leq 3$  en principe)

L'étude du domaine de définition, des racines et du signe d'une fraction rationnelle.

En cas de problème, revoir le chapitre "outils de base" de la classe de seconde.

# Un peu de logique

## Vocabulaire, concepts, convention d'écriture.

Ensemble	$\{x; y; z\}$	Collection d'éléments, finie ou infinie, possédant une propriété donnée
Cardinal de E	Card(E)	Nombre d'éléments de E quand on peut les compter
Ensemble vide	$\emptyset$	ne contenant aucun élément
Appartenance	$\in$ ou $\notin$	 x appartient à B $\rightarrow$ x est un élément de l'ensemble B $x \in B$ (x est un élément, B un ensemble)
inclusion	$\subset$ ou $\subseteq$	 A inclus dans B si tout élément de A appartient à B $A \subseteq B$ (A et B sont des ensembles)
Univers	$\Omega$	Ensemble contenant tous les autres
Complémentaire	$\Omega - A$ $\bar{A}$	 Complémentaire de A dans $\Omega = \Omega$ privé des éléments de A Plus simplement on peut noter $\bar{A}$ (non A) le complémentaire de A.
Réunion	$\cup$	 A union B ensemble des éléments de A ou de B Réunion de A et de B $A \cup B$
Intersection	$\cap$	 A inter B ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B. intersection de A et de B $A \cap B$
quel que soit	$\forall$	Quel que soit x, élément de A ... Tout x, élément de A ... $\forall x, \in A$
il existe	$\exists$ ou $\nexists$	Il existe x, élément de A tel que ... $\exists x \in A$ tel que .... Peut s'écrire $\exists x \in A \mid$ (la barre verticale remplace "tel que")
nécessaire		condition obligatoire, indispensable
suffisant		condition minimale devant être vérifiée
hypothèse		supposition, conjecture à vérifier ou admise comme vraie
axiome		hypothèse de départ admise comme vraie sans qu'il soit possible de la démontrer
proposition	P	un ensemble E ou un élément x vérifie une propriété P (x pair)
négation	non P $\bar{P}$	un ensemble $C_{\Omega} E$ ( $\bar{E}$ ) ou un élément y ne vérifie pas la propriété P (y non pair)
propriété		Proposition vraie (les nombres dont le dernier chiffre est pair sont pairs)
condition		proposition dont la vérification constitue un préalable à la vérification d'une autre proposition. si ..... alors ... " Si $f(x)=f(-x)$ alors le graphe de $f(x)$ est symétrique par rapport à l'axe des y"
Ou	$P_1$ ou $P_2$	 $P_1$ ou $P_2$ vraie si au moins une proposition est vérifiée. Ensemble vérifiant $P_1$ ou $P_2$ = réunion des ensembles
Et	$P_1$ et $P_2$	 $P_1$ et $P_2$ vraie si les deux propositions sont vraies. Ensemble vérifiant $P_1$ et $P_2$ = intersection des ensembles
implication	$P_1 \Rightarrow P_2$	 $P_1$ implique $P_2$ $P_1 =$ "x est pair", $P_2 =$ "x <sup>2</sup> est pair", $P_1 \Rightarrow P_2$ vrai Posséder la propriété $P_1$ conduit à posséder la propriété $P_2$
Réciproque	$P_2 \Rightarrow P_1$	La réciproque de $P_1 \Rightarrow P_2$ est $P_2 \Rightarrow P_1$ . $x=2 \Rightarrow x^2=4$ vraie mais pas $x^2=4 \Rightarrow x=2$ . Réciproque de si $P_1$ alors $P_2$ est si $P_2$ alors $P_1$ . "si x <sup>2</sup> est pair alors x est pair".
équivalence	$P_1 \Leftrightarrow P_2$	 $P_1$ implique $P_2$ et $P_2$ implique $P_1$ donc $P_1$ équivalente à $P_2$ . Les ensembles vérifiant les propriétés $P_1$ et $P_2$ sont les mêmes.
Contraposée	$\bar{P}_2 \Rightarrow \bar{P}_1$	 Non $P_2 \Rightarrow$ Non $P_1$ vrai équivalent à $P_1 \Rightarrow P_2$ vrai. Si $P_1 \subset P_2$ alors $C_{\Omega} P_2 \subset C_{\Omega} P_1$

**Raisonnement déductif** : suite d'implications "on a ... donc ....."

**Raisonnement par équivalence**: transformation de l'énoncé d'un problème en énoncé plus simple équivalent.

" $4x+3=2x+9$  équivalent à  $2x = 6$  équivalent à  $x = 3$ "

**Raisonnement par l'absurde**: On suppose la proposition fautive et on démontre que c'est impossible.

"Si  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  irréductible avec p et q entiers, en élevant cette égalité au carré, on démontre que p et q sont divisibles par 2,

donc que la fonction peut être réduite. On en conclut que  $\sqrt{2}$  n'est pas un rationnel".

**Raisonnement par disjonction de cas**: On partitionne la population à étudier en 2 sous-ensembles (par exemple entiers pairs, entiers impairs) et on démontre que la proposition est vraie dans chaque sous ensemble.

**Raisonnement par contraposition**: on démontre non B implique non A pour démontrer A implique B.

**Raisonnement par contre-exemple**: pour démontrer qu'une proposition est fautive on donne un contre-exemple.

" $f(x) = x^2 + 2x - 3$  n'est pas positif pour tout x réel puisque  $f(0) = -3$ ".

# Polynômes et fonctions rationnelles

**Généralités**  $5X^3-4X^2+7$  ou  $3X^2+2X+1$  sont des polynômes en X. (On peut remplacer 7 par  $7X^0$  et 1 par  $X^0$ )

Chaque terme de la forme  $KX^P$  est appelé **terme de degré P** et K est son **coefficient**.

Un polynôme en X est une somme de termes dans lesquels le degré de X varie de N à 0 (N **degré du polynôme**)

La valeur d'un polynôme est fonction de X.  $P : X \rightarrow P(X)$ , est appelée « **fonction polynôme** ».

On appelle **racines du polynôme** les solutions de  $P(X) = 0$  (si elles existent).

## Polynômes du second degré

Un polynôme de degré 2 revêt la forme générale  $P(X) = aX^2+bX+c$  avec le coefficient  $a \neq 0$ .

Toute équation de degré 2 peut (et doit) être ramenée à la forme  $P(X) = 0$  avec P(X) polynôme de degré 2.

Toute inéquation de degré 2 peut être ramenée à la forme  $P(X) < 0$  ou  $P(X) \leq 0$  (étude du signe de P(X)).

Soit un polynôme de degré 2  $P(X) = aX^2+bX+c$   $\Delta = b^2 - 4ac$  est appelé discriminant de P.

Si  $\Delta > 0$  le polynôme a 2 racines  $X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Si  $\Delta = 0$  le polynôme a une racine unique dite racine double  $X_1 = \frac{-b}{2a}$  (faire  $\Delta = 0$  dans le cas précédent)

Si  $\Delta < 0$  le polynôme n'a pas de racine (par exemple  $2X^2 + 3$  est toujours  $\geq 3$ )

## Somme et produits des racines

Lorsqu'il existe 2 racines leur somme  $S = X_1 + X_2 = \frac{-b}{a}$ , leur produit  $P = X_1 \cdot X_2 = \frac{c}{a}$ .

Si on détecte qu'à l'évidence  $X_1 = 1$ , on en déduit que  $X_2 = \frac{P}{X_1} = c/a$  et si à l'évidence  $X_1 = -1$  alors  $X_2 = -c/a$

Si on divise  $aX^2 + bX + c = 0$  par a, on obtient une équation  $X^2 - SX + P = 0$  dont les racines sont les mêmes.

Si on connaît la somme S et le produit P de 2 nombres, ces 2 nombres sont racines de l'équation  $X^2 - SX + P = 0$ .

## Factoriser un polynôme

Un polynôme ayant 2 racines  $X_1$  et  $X_2$  est factorisable sous la forme  $a(X-X_1)(X-X_2)$   $3X^2+3X-6 = 3(X-1)(X+2)$

Un polynôme ayant une racine double  $X_1$  est factorisable sous la forme  $a(X-X_1)^2$   $2X^2+4X+2 = 2(X+1)^2$

Un polynôme n'ayant pas de racine n'est pas factorisable  $-X^2 - 1$  ne peut être factorisé.

**Plus généralement si un polynôme de degré quelconque P(X) admet pour racine  $X_1$ , c'est-à-dire si  $P(X_1) = 0$  alors P(X) peut être factorisé sous la forme  $P(X) = (X-X_1) Q(X)$ , Q(X) étant un polynôme dont le degré est inférieur de 1 à celui de P(X). On obtient les coefficients de Q(X) par identification de ceux de P(X) et de  $(X-X_1) Q(X)$ .**

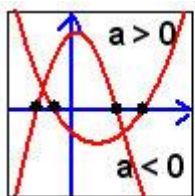
**Etudier le signe d'un polynôme** revient à résoudre une inéquation  $P(X) > 0$  (ou  $P(X) < 0$ ).

Pour un polynôme de degré 2, il suffit de le factoriser et de comparer le signe des facteurs dans un tableau.

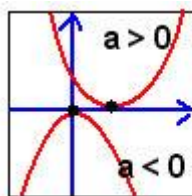
Le graphe de la fonction polynôme de degré 2 est une courbe appelée **parabole** dont l'illustration ci-dessous montre l'apparence selon le nombre des racines et le signe du coefficient a.

L'abscisse du sommet S de la parabole est  $X_s = \frac{X_1+X_2}{2} = -\frac{b}{2a}$ . Son ordonnée est  $Y_s = P(X_s)$ .

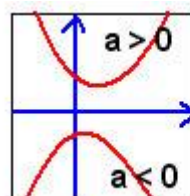
On voit très bien que le signe de P(X) ne varie que lorsque P(X) a 2 racines et dans ce cas P(X) est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de -a entre les racines.



2 racines



1 racine



0 racine

**Fraction rationnelle:** C'est un quotient de polynômes  $R(X) = \frac{N(X)}{D(X)}$  par exemple  $R(X) = \frac{2X^2 + 3X - 5}{X + 3}$

La fonction  $R : X \rightarrow R(X)$  est appelée **fonction rationnelle**.

$R(X)$  n'est définie que si son dénominateur n'est pas nul.  $R(X)$  n'est pas définie pour X racine de D(X).

$R(X)$  est nulle pour les valeurs de X qui annulent le numérateur.

Pour étudier le signe de  $R(X)$ , il suffit de factoriser N(X) et D(X) et de comparer le signe de tous les facteurs dans un tableau. Si N(X) et D(X) comportent un facteur commun, on n'a le droit de simplifier que si ce facteur n'est pas nul.

# Valeurs absolues

Toute la difficulté des problèmes comportant des valeurs absolues est de respecter la définition de la valeur absolue qui est:

$$|f(x)| = f(x) \text{ si } f(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad |f(x)| = -f(x) \text{ si } f(x) \leq 0.$$

Notez qu'une valeur absolue a (en général) **2 déterminations possibles** sans valeur absolue...

Et que ces déterminations changent selon le signe de f(x) et non pas selon le signe de x. Mais le signe de f(x) varie, en général, en fonction de la valeur de x.

• **Par exemple:**

$$|3X-15| = 3X-15 \text{ (1ere détermination) si } 3X-15 \geq 0 \text{ c'est-à-dire si } 3X \geq 15 \text{ c'est-à-dire si } X \geq 3$$

$$\text{et donc } |3X-15| = -3X+15 \text{ (2e détermination) si } X \leq 3.$$

ce que l'on peut exprimer dans un tableau montrant la détermination de  $|3x-15|$  en fonction de la valeur de X.

• **Autre exemple:**  $|2X^2 + 6X - 8|$ .

Les racines du polynôme du second degré sont +1 et -4. Son signe est positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur. Ce qui donne :

$$|2X^2 + 6X - 8| = -2X^2 - 6X + 8 \text{ si } x \in [-4 ; +1]$$

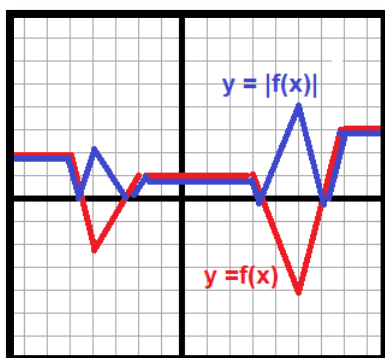
$$\text{et } |2X^2 + 6X - 8| = 2X^2 + 6X - 8 \text{ si } X \in (-\infty, -4] \cup [+1 ; +\infty)$$

Et l'on peut encore utiliser un tableau pour montrer comment varie la détermination de la valeur absolue en fonction de la valeur de X.

## Pourquoi utiliser un tableau pour illustrer cet aspect du problème ?

Supposons que la question soit : résoudre  $|3X-15| = |2X^2 + 6X - 8|$ . Nous ne savons répondre à la question qu'après avoir fait disparaître la double barre qui symbolise les valeurs absolues et la nature de l'équation va changer selon la détermination des valeurs absolues, autant dire selon la valeur de X. Un tableau va nous permettre d'y voir plus clair. Appelons E notre équation.

valeur de X	$-\infty$	- 4	1	3	$+\infty$
$ 3X-15 $	$-3X + 15$	$-3X+15$	$-3X + 15$	$3X - 15$	$3X - 15$
$ 2X^2 + 6X - 8 $	$2X^2 + 6X - 8$	$-2X^2 - 6X + 8$	$2X^2 + 6X - 8$	$2X^2 + 6X - 8$	$2X^2 + 6X - 8$
E devient	$-3X+15 = 2X^2 + 6X - 8$ $2X^2 + 9X - 23 = 0$	$-3X+15 = -2X^2 - 6X + 8$ $2X^2 + 3X + 7 = 0$	$-3X+15 = 2X^2 + 6X - 8$ $2X^2 + 9X - 23 = 0$	$3X-15 = 2X^2 + 6X - 8$ $2X^2 + 3X + 7 = 0$	$3X-15 = 2X^2 + 6X - 8$ $2X^2 + 3X + 7 = 0$
<b>Solutions</b>	On calcule les solutions de E débarrassée des valeurs absolues colonne par colonne (si elles existent) et l'on ne retient que celles qui figurent dans le domaine de X où l'équation résultante est en vigueur. Par exemple, dans la colonne $(-\infty, -4]$ on ne retient que les solutions situées entre $-\infty$ et -4.				



## Comparaison du graphe de f(x) (en bleu) et de |f(x)| (en rouge).

Les parties négatives de f(x) sont « redressées » en  $-f(x)$  de sorte que le graphe de  $|f(x)|$  ne comporte pas de partie négative.

Si f(x) est toujours positive (par exemple si  $f(x) = 3x^2+1$ ), les deux graphes coïncident.

Le graphe de  $f(x)=|x|$  est formé de 2 demi droites formant un V dont la pointe occupe l'origine. La branche de droite correspond à  $f(x)=x$  et celle de gauche à  $f(x) = -x$ .

$$(|x| = -x \text{ si } x \leq 0)$$

• Remarquons que  $g(x) = \sqrt{[f(x)]^2} = |f(x)|$  et non f(x) car g(x) existe même si f(x) est négative et en tant que racine g(x) est positive (ou nulle) par définition. Pour écrire  $g(x) = f(x)$ , il faudrait que f(x) soit toujours positive et ce n'est peut-être pas le cas. Ecrire  $g(x)=|f(x)|$  couvre tous les cas de figures.

• Parfois on trouve des fonctions telles que  $\frac{|x|}{x} f(x)$

Le facteur  $\frac{|x|}{x}$  présente la particularité d'être égal à 1 si  $x > 0$  et à -1 si  $x < 0$ . Il n'est pas défini pour  $x = 0$ . le graphe de cette fonction est celui de f(x) pour  $x > 0$  et celui de  $-f(x)$  pour  $x < 0$ . Avec un « trou » pour  $x = 0$ . Si, dans la fraction, on remplace x par  $x + k$ , on fait varier le domaine pour lequel la fonction est égale à f(x) ou  $-f(x)$ .