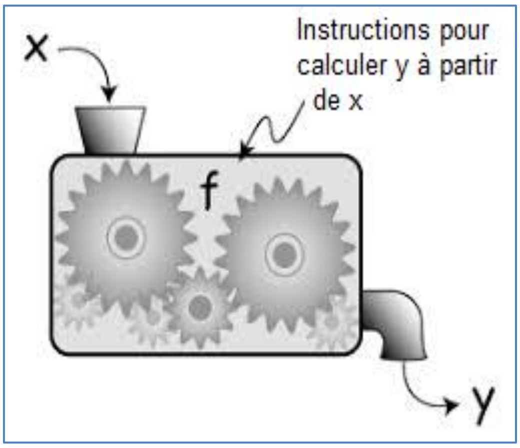
Les fonctions: généralités et fonctions usuelles

Table des matières

I

Fonctions



Une fonction à une variable est comparable à une machine dans laquelle on introduirait un nombre réel **x** afin de lui appliquer un programme qui le transformera en un autre nombre réel unique: **y**.
Par exemple la machine appelée **f** qui multiplie par 2 puis ajoute 3 donnera en sortie y = 2x + 3. Ce que l'on note f(x)=2x+3.
Evidemment si on introduit z dans cette machine on obtiendra en sortie y =f(z)= 2z+3. Et si on introduit x^2 on obtiendra $y=f(x^2)=2x^2+3$.
Il suffit donc de connaître la relation entre x et y sous la forme
y = "une expression en x", ce que l'on note **y=f(x)**, pour définir le programme auquel obéit la machine.
On peut avoir par exemple:

$y=f(x)=-5x+4$	$y=f(x)=5x^2-3x+1$	$y=f(x)=\cos(x)$	$y=f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$

Vocabulaire et conventions:

Domaine de définition

Il existe des fonctions qui n'acceptent pas toutes les valeurs de x dans ℝ.
Par exemple $f(x)=\frac{2}{x-3}$ n'est pas définie pour x = 3, valeur qui annule son dénominateur.
Elle n'est définie que pour $x \in \mathbb{R}-\{3\}$ ce que l'on écrit "domaine de définition de f : $Df = \mathbb{R}-\{3\}$".
Autre exemple : $f(x)=\sqrt{x-3}$ n'est définie que pour $x-3 \geq 0$ autrement dit $x \geq 3$ ou $Df=[3,+\infty[$
On peut aussi restreindre arbitrairement l'appartenance de x à un domaine de ℝ qu'on appellera Df.

Définition Pour définir une fonction il faut établir le domaine Df auquel appartient x et dire
"Soit f la fonction qui à x∈Df associe f(x) =2x+3" ou "Soit f définie sur Df qui à x fait correspondre y =2x+3"
Ce que l'on schématise par:

$$\begin{aligned} f : Df &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x)=2x+3 \end{aligned}$$

Le lien entre x et y.

Quand y et x sont liés par une relation de type y=f(x) on dit que **y est l'image de x par f**.
x est l'antécédent de y par f.

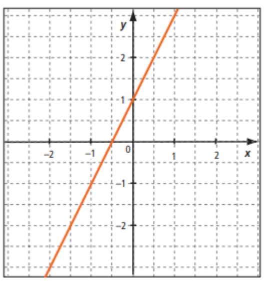
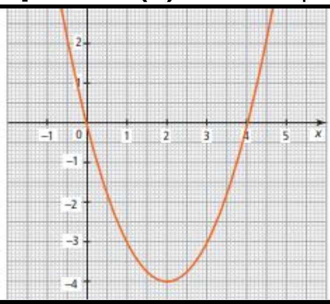
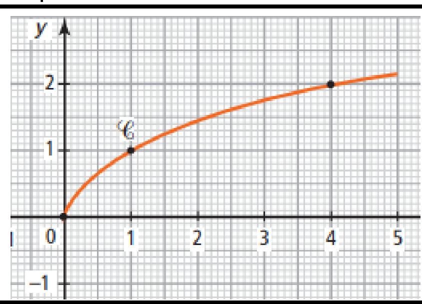
Pour trouver l'image d'un nombre donné, il suffit de remplacer x par sa valeur dans l'expression de f.
Par exemple si $f(x)= =5x^2-3x+1$, l'image de 2 est $f(2)=5(2)^2-3(2)+1 = 20-6+1 = 15$.
Remplacer x par des parenthèses et mettre la valeur de x dans les parenthèses est une bonne pratique.

Pour trouver l'antécédent d'un nombre donné (y) il faut au contraire résoudre l'équation f(x)= y.
Par exemple si $f(x)= 5x^2-3x+1$, pour trouver l'antécédent de 3 il faut résoudre l'équation $5x^2-3x+1 = 3$.
On transforme en $5x^2-3x-2 = 0$ et on trouve 2 antécédents x' = 1 et $x'' = -\frac{2}{5}$.

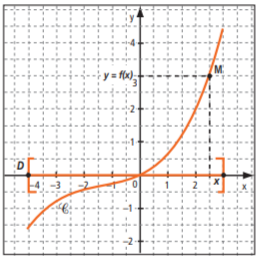
L'image de x par la fonction f est unique. Mais un nombre y peut avoir plusieurs antécédents par f.

Graphe de f(x).

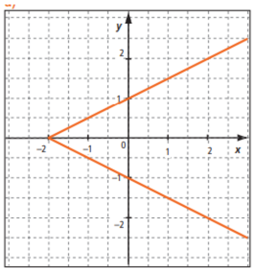
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, **l'ensemble des points de coordonnées (x,f(x))** dessine en général une courbe (ou une droite) que l'on nomme **graphe de f(x)**. En voici quelques exemples:

		
$f(x)=2x+1$	**$f(x)=x^2-4x$**	**$f(x)=\sqrt{x}$**
Points d'intersection du graphe avec les axes	Le graphe coupe l'axe des y en un point unique d'ordonnée f(0). Sur l'axe des x les points du graphe ont pour abscisse les solutions de f(x)=0	

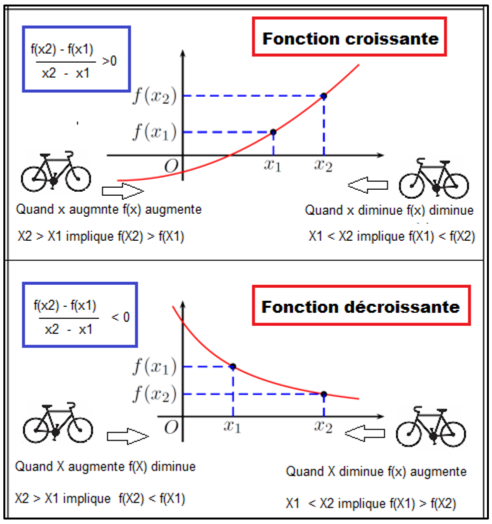
L'étude du graphe



A gauche **le graphe** ou **courbe représentative** d'une fonction f(x) dont le Df est [-5 ; +3]. y =f(x) est **l'équation** de cette courbe.
Il faut bien réaliser que pour tout point (x,y) du plan, si x ∈Df et y =f(x) alors le point se situe sur la courbe.
Si on appelle C cette courbe C = {(x,y) | x∈ Df et y =f(x) }.
Cela signifie que C est l'ensemble des points (x,y) vérifiant cette propriété et qu'il n'y a pas de point vérifiant cette propriété en dehors de C.
La figure de droite n'est pas le graphe d'une fonction car il existe au moins une valeur de x ayant 2 images. Par exemple y = –2 et y =+2 sont images de x=2.



Sens de variation d'une fonction.



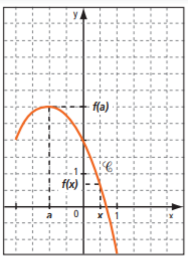
Le graphe étant sensé traduire l'influence de la variable x sur y, la première information qu'on attend de lui est de nous dire si, quand x augmente, y augmente ou diminue.

On dit que la fonction est **croissante** sur un intervalle I de ℝ quand à toute augmentation de x sur cet intervalle correspond une augmentation de f(x). Mais comme on le constate sur la figure ci-contre, il revient au même de dire qu'à toute diminution de x correspond une diminution de f(x). Nous pouvons résumer cette propriété en disant:
Une fonction est croissante sur I si pour tout x1∈ I et x2∈ I on a x2 – x1 du même signe que f(x2) – f(x1) ou $\frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1} > 0$.
De la même façon on dira que f(x) est **décroissante** sur un intervalle I de ℝ si f(x) varie en sens inverse de x. Autrement dit
Une fonction est décroissante sur I si pour tout x1 ∈ I et x2 ∈I x2 – x1 est du signe inverse de f(x2) – f(x1) ou si $\frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1} < 0$.

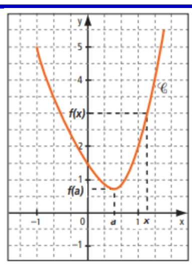
Pour connaître **le sens de variation de f(x)** sur un intervalle, il faut tester le signe de $\frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}$ pour tout couple de valeurs (x1, x2) appartenant à cet intervalle. Si ce signe est positif → fonction croissante. Sinon → fonction décroissante.
Une fonction est dite **monotone** sur un intervalle si son sens de variation ne change pas sur cet intervalle.

Exemple pour f(x) = x^2 → $\frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1} = \frac{x2^2-x1^2}{x2-x1} = \frac{(x2+x1)(x2-x1)}{x2-x1} = x2 + x1$ → f(x) croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$

Extremums d'une fonction et tableau de variation



Soit a ∈ I un intervalle de ℝ I ⊂ Df
On dit qu'une fonction f(x) admet **un maximum** sur I pour x =a si pour tout x ∈ I
f(x) ≤ f(a)



Soit a ∈ I un intervalle de ℝ I ⊂ Dg
On dit qu'une fonction g(x) admet **un minimum** sur I pour x =a si pour tout x ∈ I
g(x) ≥ g(a)

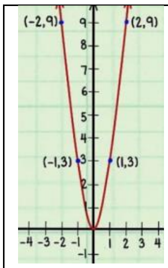
Tableau de variation de f(x)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f(x)	$-\infty$ ↗	$+3$	↘ $-\infty$

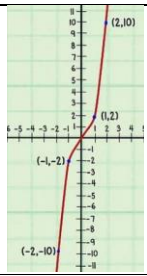
Tableau de variation

x	$-\infty$	$+0{,}5$	$+\infty$
g(x)	$+\infty$ ↘	$+0{,}75$	↗ $+\infty$

Fonction paire, fonction impaire

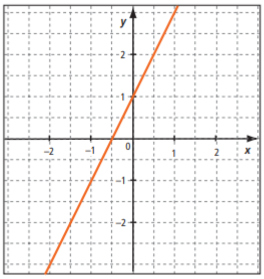


On dit qu'une fonction est **paire** si son graphe admet l'axe des y comme axe de symétrie.
Autrement dit pour tout x: f(x)=f(–x).
Si dans f(x) on remplace x par –x, l'expression de f(x) ne change pas.
Exemple f(x) =x^2+3
f(-x)=$(–x)^2$+3 = x^2+3



On dit qu'une fonction est **impaire** si son graphe est symétrique par rapport à l'origine O.
Autrement dit pour tout x: f(x)= – f(–x).
Si dans f(x) on remplace x par –x,
On obtient – f(x).
Exemple f(x) =x^3 +x
f(-x)=$(-x)^3$+(-x) = – x^3 –x = –(x^3 +x) =– f(x)

La fonction affine y = ax+b



La famille des fonctions de la forme **f(x) =ax + b** où **a** et **b** sont des nombres réels quelconques est appelée famille des **fonctions affines**.

f(x)=2x+3 f(x) = –x+0,5 f(x) = $\frac{2}{3}$ x + $\sqrt{2}$ sont des fonctions affines.

Leur domaine de définition Df = $\mathbb{R}$.

Leur graphe est une droite que la connaissance des paramètres a et b permet de tracer précisément. Ci-contre on voit le graphe d'équation y = 2x + 1.

a est appelé **coefficient directeur** de la droite et **b** son **ordonnée à l'origine**.

Coefficient directeur a:

Lorsque x augmente de 1, y varie de ax+b à a(x+1)+b = ax + b +a Donc

Lorsque x augmente de 1, y varie de a

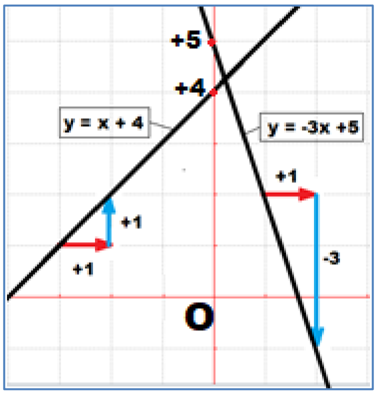
On voit sur la figure ci-contre que

Pour la droite d'équation y = –3x +5 (a= –3) quand x augmente de 1, y diminue de 3.

Pour la droite d'équation y =x+4 (a=1) quand x augmente de 1, y augmente de 1.

De plus on trouve que quels que soient les réels x1 et x2 $\frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1} = a$.

D'où: **f(x)=ax+b sera croissante si a est positif, et décroissante si a est négatif**



Ordonnée à l'origine b.

Si dans y =ax+b on fait x = 0 , on trouve que y = b.

b est donc l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des y.

y=x+4 coupe cet axe au point (0;+4). Y= –3x +5 coupe cet axe au point (0; +5).

En résumé:

> Selon la valeur de **a**, la droite représentative de f(x) =**a**x+b croit ou décroit et elle croit ou décroit d'autant plus fortement que la valeur absolue de a est importante. **a** mérite donc bien son appellation de "**coefficient directeur**".
> Quant à **b** c'est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des y (**Ordonnée à l'origine**, pour x =0)

Vecteur directeur :

Soit (D) une droite, on appelle vecteur directeur de (D) tout vecteur ayant (D) pour direction.

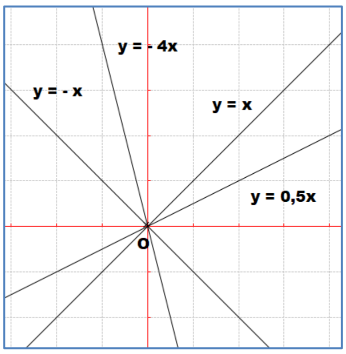
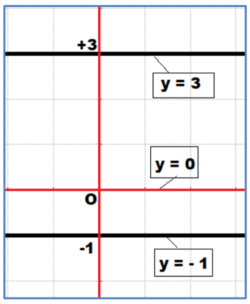
En particulier si A et B sont 2 points de la droite (D), $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (D).

Or nous savons que la droite (D) d'équation y = ax + b est telle que si x augmente de 1, y varie de a donc

A (0,b) ∈ (D) et B(1,b+a) ∈(D) donc $\overrightarrow{AB}$ (1 – 0 ; b +a –b) autrement dit $\overrightarrow{AB}$ (1,a) est un vecteur directeur de (D).

> $\vec{u}$ **(1; a) est un vecteur directeur** de la droite d'équation y =ax + b.
> Or toutes les droites de coefficient directeur **a** ont ce vecteur directeur. Donc elles sont **parallèles** entre elles.

Fonction linéaire, fonction constante

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Les fonctions linéaires sont les fonctions affines pour lesquelles b=0.
Elles ont pour équation
y =ax
Leur graphe passe par l'origine O du repère.
Lorsqu'une droite passe par l'origine, son équation est de la forme y =ax et c'est le signe que les grandeurs y et x sont proportionnelles puisque
$\frac{y}{x} = a$ qui est une constante.
a est le coefficient de proportionnalité des 2 grandeurs.</td>
<td>
</td>
<td>Les fonctions constantes sont les fonctions affines pour lesquelles a = 0.
Elles ont pour équation
y = b
Leur graphe est parallèle à l'axe des x.
L'axe des x lui-même a pour équation y = 0.

On peut parler des droites parallèles à l'axe des y comme des droites d'équation
x = constante
mais elles ne sont le graphe d'aucune fonction.</td>
</tr>
</table>

Quelques problèmes sur la fonction affine

Soit f(x) = ax + b. Pour quelles valeurs de x a-t-on f(x) > 0 ou f(x) > k.

Par exemple pour quelles valeurs de x a-t-on f(x) = – 2x +6 > 0?
Il suffit de résoudre l'équation.
–2x +6 > 0
Equivalente à –2x > –6
Equivalente à x < $\frac{-6}{-2}$ soit x < 3. La solution est donc x∈] -∞ ; 3 [.

Déterminer l'équation de la droite qui passe par A(1 ;5) et B (3;9)

Plus logique:
Soit (D) la droite et y =ax+b l'équation cherchée.
On écrit les informations que donne l'énoncé sous la forme de 2 équations.
A∈ (D) s'écrit 5 =a(1)+b → 5 = a+b (e1)
B∈ (D) s'écrit 9 = a(3) +b → 9 = 3a+b (e2)
Système de 2 équations à 2 inconnues (a et b)
On trouve a = 2 et b = 3.
y = 2x+3 est l'équation cherchée.

Plus technique
On écrit que a = $\frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}$ soit ici $\frac{9-5}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$
Puis dans y = 2x + b
On écrit que A ∈(D) 5 = 2(1) + b pour trouver b = 3.
y = 2x+3 est l'équation cherchée.

Déterminer l'équation de la droite (D) qui passe par A(1 ;5) et est parallèle à la droite d'équation y =2x –5

Soit y=ax+b l'équation de (D)
2 droites parallèles ont même coefficient directeur. Donc a = 2. L'équation de (D) est de la forme y=2x+b
On écrit que A∈(D) → 5 = 2(1) + b d'où b = 3.
Y = 2x + 3

Déterminer l'équation de la droite (D) qui passe par A(1 ;5) et a pour vecteur directeur $\vec{u}(3,6)$

Soit on cherche le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$
B(1+3 ; 5+6) → B(4,11).
Ce point appartient à (D).
Puis le problème se réduit à chercher l'équation de la droite qui passe par A et B.

Soit on cherche le vecteur (1,a) colinéaire à $\vec{u}$.
Pour cela il suffit de diviser les 2 coordonnées de $\vec{u}$ par 3 et on trouve (1;a) = ($\frac{3}{3}$; $\frac{6}{3}$) = (1 ; 2).
D'où l'on déduit que a = 2.
Puis on écrit que A∈(D) : 5 =2 + b → b = 3

Chercher le point d'intersection des droites d'équation y = 2x +3 et y = –3x +8

Soient x, y les coordonnées de ce point. x, y vérifient les équations
Y = 2x + 3 e1
Y = –3x + 8 e2
Il suffit de résoudre ce système de 2 équations à 2 inconnues et on trouve x = 1 et y 5.

Réciproquement, on peut nous donner le graphe des 2 droites et nous demander de résoudre graphiquement le système. Il suffit de dire que seul le point situé à l'intersection des droites a des coordonnées vérifiant simultanément les deux équations. Donc lire les coordonnées de ce point sur le graphique répond à la question.

Fonction polynôme de degré 2 $y=ax^2 + bx + c$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Domaine de définition : visiblement f est définie pour tout x ∈ ℝ.   Df = ℝ

Sens de variation de f

Il dépend du signe de $\frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1} = \frac{a(x2^2-x1^2)+b(x2-x1)}{x2-x1} = a(x2+x1)+b$

La fonction est croissante pour $a(x2+x1)+b>0$

Si a est positif, cela correspond à x2+x1 > $-\frac{b}{a}$ Si a est négatif cela correspond à x2+x1 < $-\frac{b}{a}$

Or si x1 et x2 sont plus petits que $-\frac{b}{2a}$ on a x2+x1 < $-\frac{b}{a}$

et s'ils sont tous les deux plus grands que $-\frac{b}{2a}$ on a x2+x1 > $-\frac{b}{a}$

On en déduite le tableau de variation suivant :

Si a >0	x	-∞	$-\frac{b}{2a}$	+∞	Si a < 0	x	-∞	$-\frac{b}{2a}$	+∞
	f(x)	+∞ ↘	f($-\frac{b}{2a}$)	↗ +∞		f(x)	– ∞ ↗	f($-\frac{b}{2a}$)	↘ – ∞

Symétrie axiale du graphe

On démontre que quel que soit le nombre k on a f($-\frac{b}{2a}$ – k) = f($-\frac{b}{2a}$ + k)

Ce qui établit que le graphe est symétrique par rapport à la droite x = $-\frac{b}{2a}$ (parallèle à l'axe des y).

Points d'intersection du graphe de f avec les axes.

■ Le point d'intersection du graphe avec l'axe des y existe toujours. Il a pour ordonnée $f(0)=a(0)^2+b(0)+c = c$

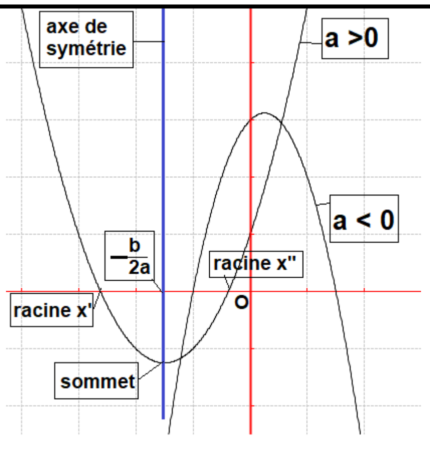
■ Les points d'intersection du graphe avec l'axe des x n'existent que si l'équation f(x) = 0 a des racines.

Si Δ < 0 → pas de racine → le graphe ne coupe pas l'axe des x

Si Δ = 0 → racine unique → le graphe touche l'axe des x en un seul point d'abscisse $-\frac{b}{2a}$

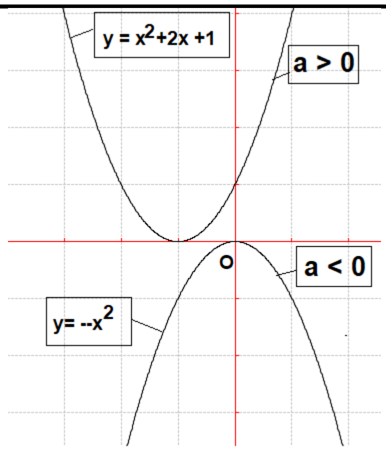
Si Δ >0 → 2 racines → le graphe coupe l'axe des x en 2 points d'abscisse x' et x" dont M($-\frac{b}{2a}$, 0) est le milieu

Le graphe de f s'appelle une parabole.



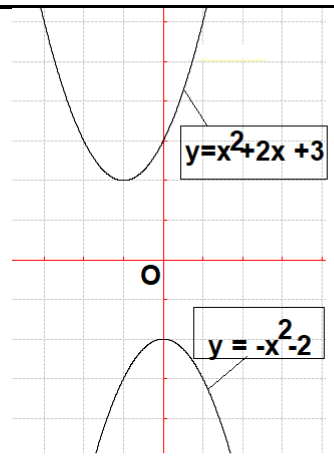
Paraboles à Δ positif (2 racines).

a >0 concavité tournée vers le haut
a < 0 concavité tournée vers le bas
axe de symétrie x = $-\frac{b}{2a}$
Sommet coordonnées ($-\frac{b}{2a}$; f($-\frac{b}{2a}$))



Paraboles à Δ nul (1 racine).

Vérifiez
Le rôle de a dans le sens de variation.
L'équation de l'axe de symétrie.
Les coordonnées du sommet et de la racine unique.



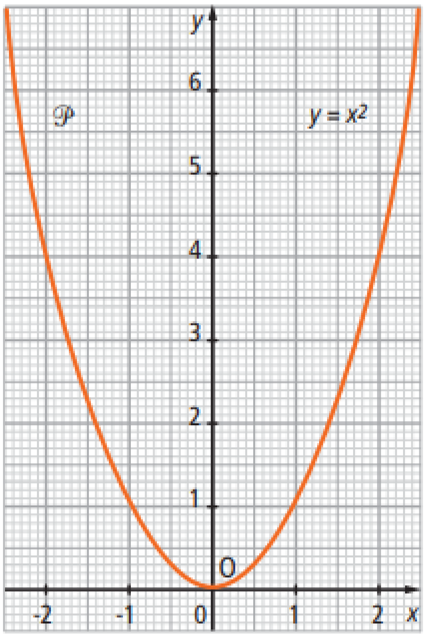
Paraboles à Δ négatif (0 racine)

Faites les mêmes vérifications que dans le cadre précédent.
Comparez les équations des 2 cadres. Que remarquez-vous?

Observez bien ces dessins et faites le lien avec ce que nous avons dit avant (sens de variation, axe de symétrie, points d'intersection avec les axes).
Quand vous étudiez le signe d'un polynôme du second degré, il est bon de faire le lien avec ces images.

Fonction carré f(x) = y =x^2

Cette fonction est un cas particulier de fonction polynôme du second degré (y=ax^2+bx+x avec a = 1, b = 0 et c =0).

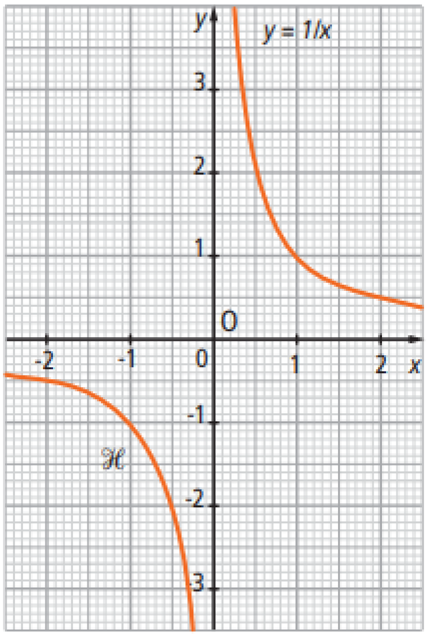


Son **domaine de définition** est ℝ.
C'est une fonction polynôme de degré 2 à Δ nul (b^2 –4ac =0).
Donc elle admet une **racine unique** x' = 0.
Son **axe de symétrie** est la droite x = $\frac{-b}{2a}$ = 0 (l'axe des y).
Son sommet a pour coordonnées (0; f(0)) = (0,0) (l'origine O du repère)
C'est aussi une fonction paire puisque f(–x) = $(–x)^2$ = x^2 = f(x).
Comme a = 1 est positif, la concavité de la parabole est tournée vers le haut.
Comme $x^2 \geq 0$ pour tout x ∈ ℝ c'est une **fonction positive ou nulle**.
On a beau choisir un nombre positif K aussi grand que possible, il existe toujours un nombre positif a tel que pour tout x ≥ a on ait x^2 > K et $(–x)^2$ > K.
Cela signifie que f(x) tend vers + ∞ quand x tend vers + ∞ ou – ∞.

Tableau de variation:

x	-∞	0	+∞
f(x)	+∞ ↘	0	↗ +∞

Fonction inverse f(x) = y = $\frac{1}{x}$



Cette fonction est définie pour tout x ∈ ℝ sauf x =0. Df =ℝ – {0} ou ℝ *.
f(–x) = $\frac{1}{-x}$ = $-\frac{1}{x}$ = – f(x) donc c'est une **fonction impaire** ce qui signifie que son graphe est symétrique par rapport à l'origine O.
La courbe représentative de cette fonction s'appelle **l'hyperbole**

Sens de variation:

$$\frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1} = \frac{\frac{1}{x2}-\frac{1}{x1}}{x2-x1} = \frac{\frac{x1-x2}{x1x2}}{x2-x1} = \frac{-(x2-x1)}{x1x2(x2-x1)} = -\frac{1}{x1x2}$$

Or que x1 et x2 soient tous deux positifs ou tous deux négatifs cette expression est négative, ce qui fait que f(x) est décroissante sur] – ∞ ; 0[et sur]0 ;+∞ [

Comportement aux limites.

Faisons tendre |x| vers 0: (rappel |x| =valeur absolue ou distance à 0 de x)
f(1) =1 ; f(0,1) =10 ; f(0,001) =1000 ; f(0,000001)=100000
Donc plus |x| devient petite, plus |f(x)| devient grande
Quand x est positif et x tend vers 0, f(x) tend vers + ∞.
Quand x est négatif et x tend vers 0, f(x) tend vers – ∞
Quand on fait tendre |x| vers +∞ c'est le contraire:
f(10) =0,1; f(100)=0,01; f(10000)=0,0001; f(1000000)=0,000001
Plus |x| devient grande plus |f(x)| devient proche de zéro.
Quand x tend vers +∞ ou vers –∞ , f(x) tend vers 0.

Tableau de variation de la fonction inverse

x	-∞	0	+∞
f(x)	0 ↘ – ∞	‖	+∞ ↘ 0

Fonction homographique $f(x) = y = \frac{ax+b}{cx+d}$

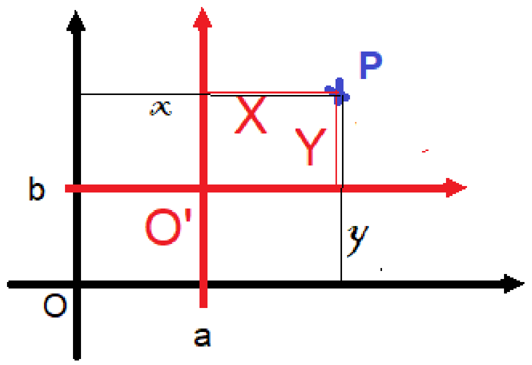
C'est ce qu'on appelle un fraction rationnelle.
f(x) $=\frac{1}{x}$ est un cas particulier de fonction homographique avec a = 0, b =1, c = 1 et d = 0.
Donc on s'attend à ce que la courbe représentative de cette fonction soit aussi une hyperbole.

Domaine de définition:
F(x) n'est pas définie pour cx + d = 0 c'est-à-dire pour x = $-\frac{d}{c}$.

Nous faisons 2 remarques importantes:

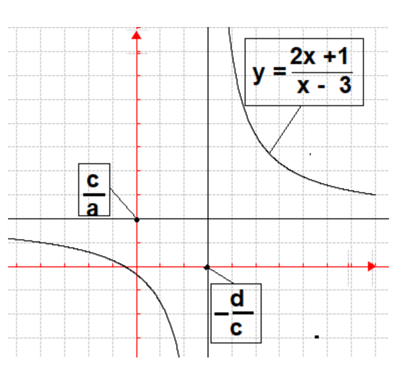
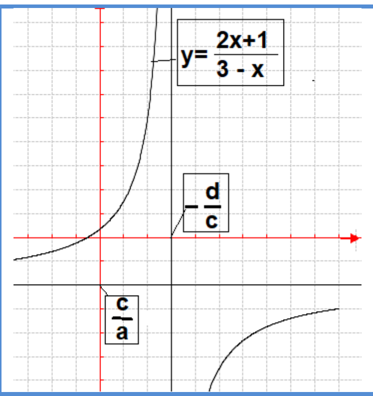
1. C'est donc quand x tendra vers $-\frac{d}{c}$ (et non vers 0) que |f(x)| deviendra infinie.
2. Et quand |x| tendra vers +∞, b deviendra négligeable devant ax, d deviendra négligeable devant cx et f(x) se comportera comme $\frac{ax}{cx}$. Autrement dit quand |x| tendra vers +∞, f(x) tendra vers $\frac{a}{c}$ (et non vers 0).

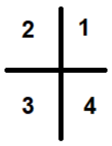
Technique du changement d'axe



Dans un repère d'origine O, l'équation d'une fonction est y = f(x).
Supposons qu'on prenne un nouveau repère d'origine O' constitué des droites dont l'équation est x = a et y =b dans le premier repère dotées des mêmes vecteurs unitaires.
Si les coordonnées d'un point P sont (x,y) dans le premier repère elles deviennent (X,Y) dans le nouveau repère.
Comme on le voit sur le dessin le lien entre anciennes et nouvelles coordonnées est x = X +a et y = Y + b.
Pour avoir l'équation de f dans le nouveau repère il suffit, dans y=f(x) de remplacer x et y par leur valeur en fonction de X et de Y et on aura la nouvelle équation Y = f(X).

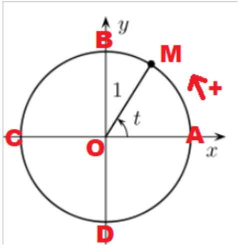
En ce qui concerne la fonction homographique y = $\frac{ax+b}{cx+d}$ si nous prenons comme nouveau repère celui qui est formé avec les droites d'équation x = $-\frac{d}{c}$ et y = $\frac{a}{c}$, nous avons x = X $-\frac{d}{c}$ et y= Y + $\frac{a}{c}$.
y = $\frac{ax+b}{cx+d}$ devient Y +$\frac{a}{c}$ = $\frac{a\left(X-\frac{d}{c}\right)+b}{c\left(X-\frac{d}{c}\right)+d}$ et finalement on obtient une nouvelle équation du type Y = $\frac{K}{X}$ où K peut être positif ou négatif selon les valeurs de a, b, c, d.
K va donc agir sur le graphe de $\frac{1}{x}$ comme un facteur d'échelle pour donner $\frac{K}{x}$, c'est-à-dire qu'il va tendre à agrandir ou diminuer y pour une même valeur de x selon que sa valeur absolue sera plus grande ou plus petite que 1.
Et d'autre part le graphe de la fonction homographique sera dans les mêmes quadrants 1 et 3 que le graphe de $\frac{1}{x}$ ou dans les quadrants 2 et 4 selon que K sera positif ou négatif.
Mais globalement on retrouvera l'hyperbole dans le graphe d'une fonction homographique.

	K positif Graphe dans les quadrants 1 et 3.		K négatif Graphe dans les quadrants 2 et 4.



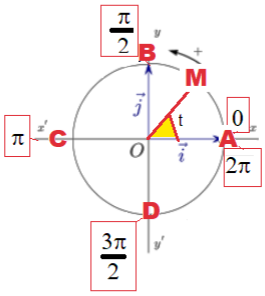
Convention de numérotation des quadrants d'un repère (on emploie souvent les chiffres romains)

Le cercle trigonométrique.



Dans un repère orthonormé, on trace un cercle de centre O et de rayon 1.
On note les points d'intersection du cercle avec les axes A(1,0), B(0;1) , C(–1,0) et D(0;–1).
M est un point mobile sur le cercle.
Dans un premier temps on se propose de mesurer l'angle $\widehat{AOM}$. Et comme cet angle peut avoir deux mesures selon qu'on va de OA à OM dans un sens ou dans l'autre, on décide que si l'on tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre la mesure de l'angle sera positive, tandis qu'elle sera négative si on tourne dans l'autre sens.
Donc, en degrés $\widehat{AOM}$ peut avoir deux mesures t (mesure positive) ou t – 360 (mesure négative).

> Un **cercle trigonométrique** est un cercle de rayon 1, associé à un repère orthonormé de même centre et doté d'un sens positif pour la mesure des angles.



Le rayon du cercle trigonométrique étant 1, la mesure de sa circonférence est 2π.
Donc, quand M va décrire le cercle dans le sens positif, la mesure de l'arc $\widehat{AM}$ va augmenter de 0 à 2π.
Quand M sera en B, la mesure de cet arc sera $\frac{\pi}{2}$,
Quand M sera en C la mesure de l'arc sera π
Quand M sera en D la mesure de l'arc sera $\frac{3\pi}{2}$
Quand M sera en A, on aura fait un tour complet du cercle la mesure de l'arc sera 2π.
A tout point M du cercle correspond une mesure de l'arc $\widehat{AM}$ comprise entre 0 et 2π.

> Par définition, **la mesure en radians d'un angle** est égale à la mesure de l'arc qu'il intercepterait en tant qu'angle au centre dans le cercle trigonométrique.

Si on appelle t la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$,
- t=0 ou 2π quand M est en A (2π en radians = 360°) ,
- t =$\frac{\pi}{2}$ quand M est en B ($\frac{\pi}{2}$ en radians = 90°)
- t = π quand M est en C (π en radians = 180°)
- t = $\frac{3\pi}{2}$ quand M est en D ($\frac{3\pi}{2}$ en radians = 270°)

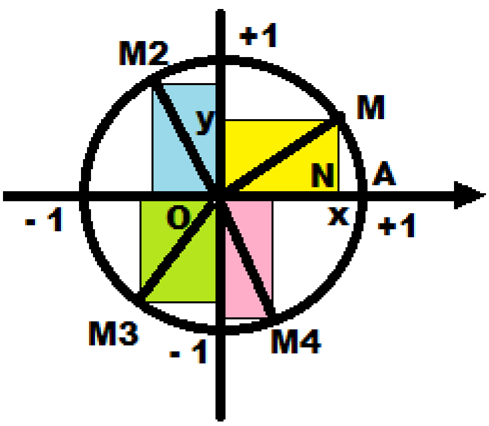
La mesure en radians étant proportionnelle à la mesure en degrés, il est facile de faire la correspondance entre les deux unités de mesures. Voici quelques correspondances qu'il faut connaître:

Degrés	0	30	45	60	90	180	270	360
Radians	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π

En fait il suffit de savoir que π =180 et π/2= 90 puis de se demander par combien il faut diviser ou multiplier l'un de ces 2 angles (180 ou 90) pour obtenir les autres (30, 45, 60, 90, 270).

A partir de là il est facile de calculer que, par exemple un angle de 150°=180° - 30°= π – π/6 = 5π/6 en radians.
Si la mesure positive d'un angle en radians est t, sa mesure négative en radians est t – 2π (exemple 3π/2 → – π/2)
En physique, on peut avoir besoin de mesurer des angles plus grands que 2π, dans le cas où le point M fait plusieurs fois le tour du cercle avant de s'arrêter (cas de la manivelle d'un treuil, par exemple).
<u>Dans le cas où t > 2π on s'efforce de l'exprimer sous la forme t =θ +2kπ où θ est plus petit que 2π et k∈ℤ</u> (nombre de tours)

Fonction sinus, fonction cosinus.

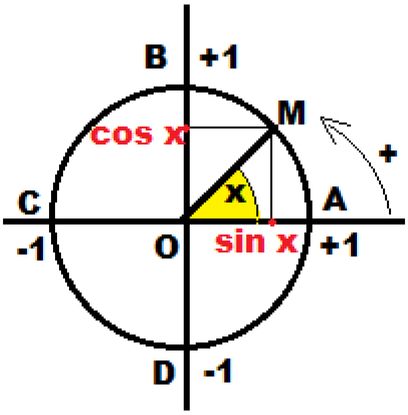


Où que se trouve le point M sur le cercle, ses coordonnées (x,y) varient dans l'intervalle [– 1; + 1].
Quand M est dans le quadrant 1.
Si N est le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur l'axe des x,
N est le point d'abscisse x. La mesure de l'angle $\widehat{NOM}$ est t.
Or le triangle ONM est rectangle en N et on a
Cos (t) = $\frac{ON}{OM} = \frac{x}{1} = x$ et sint(t) = $\frac{NM}{OM} = \frac{y}{1} = y$
Si t est l'angle que fait OM avec Ox
Les coordonnées de M sont (cos(t) ; sin(t)).
Généralisation: jusques là, nous ne savions calculer le sinus ou le cosinus d'un angle que s'il appartenait à un triangle rectangle, c'est-à-dire s'il mesurait entre 0 et π/2 radians. Nous allons étendre cette notion à tous les angles quelle que soit leur mesure, grâce à la définition suivante:

> Soit M le point du cercle trigonométrique tel que $\widehat{AOM}$ = t radians.
> Alors les coordonnées de M sont [cos(t); sin(t)]

Désormais les fonctions y=cos(x) et y=sin(x) sont définies sur ℝ à valeurs dans [– 1 ; +1]

Fonctions circulaires (ou trigonométriques)



Aux termes de la définition précédente, la configuration du cercle trigonométrique étant celle de la figure ci-contre:
Si on appelle x la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$, quelle que soit la position de M, ses coordonnées sont (cos x ; sin x).
D'après le cours sur les vecteurs $\|\overrightarrow{OM}\|$ = **sin² x +cos² x = 1**

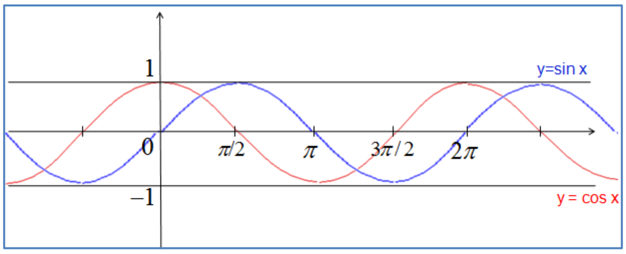
Prenons quelques repères

M en	A	B	C	D
x =	0	π/2	π	3π/2
Cos x	+1	0	–1	0
Sin x	0	+1	0	–1

Selon le quadrant dans lequel se trouve M on a

2 Cos x négatif Sin x positif – +	**1** Cos x positif Sin x positif + +
3 Cos x négatif Sin x négatif – –	**4** Cos x positif Sin x négatif + –

Le graphe des fonctions circulaires



Ce type de courbe s'appelle une sinusoïde.
Le graphe de sin x est l'image du graphe de cos x par une translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$. Autrement dit **cos(x) = sin(x+π/2)**
Comme f(x+2π) =f(x), les courbes reproduisent à l'infini le tronçon de graphe compris entre 0 et 2π.
On dit que **f est périodique de période 2π**.

Sur une période leur tableau de variation est le suivant :

x	0		π/2		π		3π/2		2π
Sin x	0	↗	1	↘	0	↘	–1	↗	0

x	0		π/2		π		3π/2		2π
Cos x	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

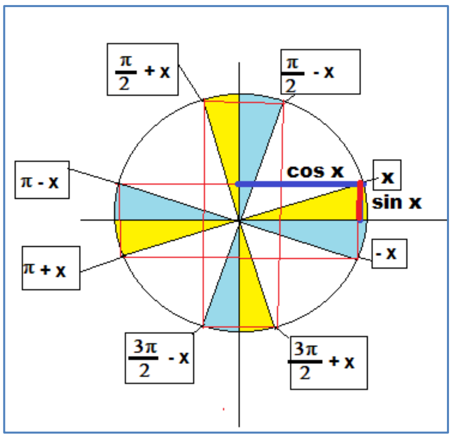
Quelques valeurs à connaître ou à savoir retrouver par le calcul

x en degrés	0	30	45	60	90
x en radians	0	π/6	π/4	π/3	π/2
Sin x	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
Cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0

Valeurs remarquables quand les angles sont ceux d'un triangle rectangle isocèle (45°) ou de la moitié d'un triangle équilatéral (30° et 60°).

Le sinus augmente avec x → $\sqrt{0}/2$, $\sqrt{1}/2$, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{4}/2$
Le cosinus suit le processus inverse →$\sqrt{4}/2$, $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{1}/2$, $\sqrt{0}/2$.

Plus de correspondances entre les lignes trigonométriques de certains angles.



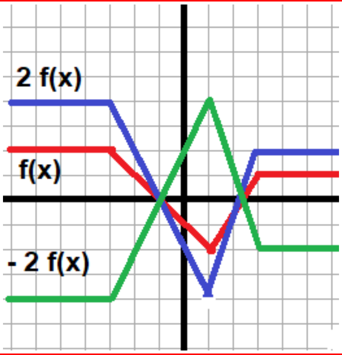
Supposons qu'on connaisse le sinus et le cosinus de l'angle x qu'on a pris volontairement petit sur le dessin pour que son sinus soit bien plus petit que son cosinus.
Si sur le dessin on repère les angles obtenus en ajoutant ou en enlevant x aux angles 0, π/2, π et 3π/2 on obtient la figure ci-contre qui évoque une "croix de Malte".
Sur cette figure on remarque que le sinus et le cosinus de ces 8 angles sont au signe prés égaux soit au sinus, soit au cosinus de x.

angle	x	π/2–x	π/2+x	π–x	π+x	3π/2-x	3π/2+x	-x
sinus	Sin x	cos x	cos x	sin x	-sin x	-cos x	-cos x	-sin x
cosinus	Cos x	sin x	-sin x	-cos x	-cos x	-sin x	sin x	Cos x

Ce tableau n'est pas à retenir par cœur, par contre il faut savoir réutiliser le procédé qui permet de calculer les lignes de ces angles.

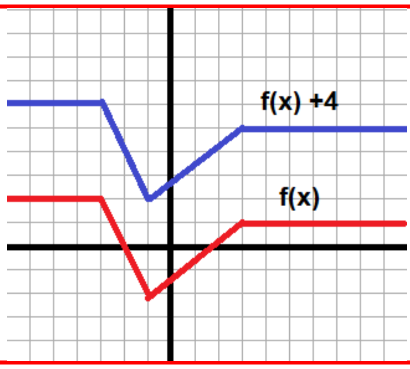
Méthodes graphiques

Modifier une fonction



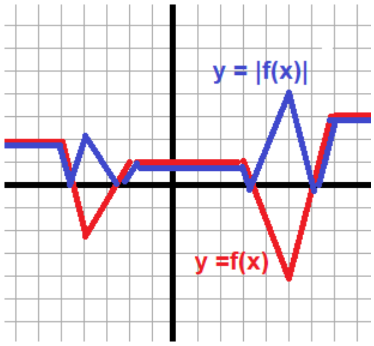
Multiplication de f(x) par un nombre k

Pour une valeur donnée de x, y est multiplié par k.
Multiplier f(x) par –1 donne un graphe symétrique de celui de f(x) par rapport à l'axe des x.
Si |k| < 1 cela rapproche le graphe de l'axe des x.
Si |k| > 1 cela éloigne le graphe de l'axe des x.



Ajouter un nombre k à f(x).

Cela revient à translater le graphe de f(x) vers le haut ou vers le bas selon que k est positif ou négatif.
Le vecteur de la translation est $k\vec{j}$.

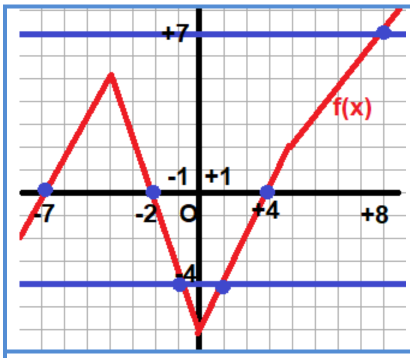


Prendre la valeur absolue de f(x).

Pour les valeurs de x telles que f(x) ≥ 0 le graphe de |f(x)| est confondu avec le graphe de f(x).

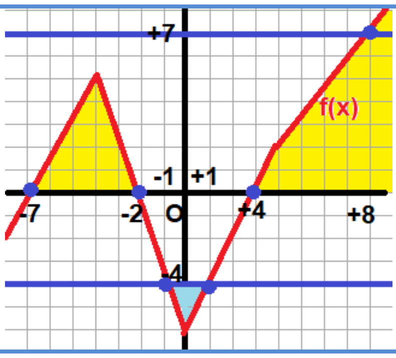
Pour les valeurs de x telles que f(x) < 0 le graphe de |f(x)| est le symétrique du graphe de f(x) par rapport à l'axe des x.

Comparaison d'une fonction et d'un nombre k



Les solutions de l'équation f(x) =k

Sont les abscisses des points d'intersection du graphe de y=f(x) avec la droite d'équation y =k.
f(x) =7 a une solution unique x = +8
f(x) =0 a 3 solutions {–7; –2, +4}
f(x) = –4 a 2 solutions {–1 ; +1}



Les solutions de l'inéquation f(x)>k

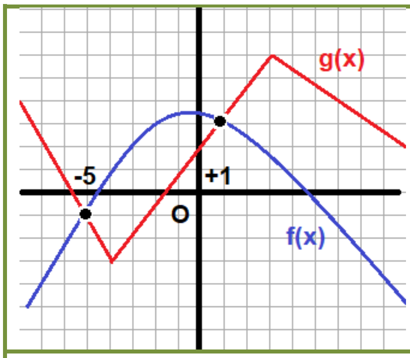
sont les intervalles de ℝ pour lesquels le graphe de f(x) est au-dessus de la droite d'équation y=k. (au-dessous pour f(x)<k)
f(x) >0 a pour solution]-7;-2[U]+4; +∞ [
f(x) ≤ – 4 a pour solution [–1; +1]

Le plus souvent on résout ce type de problème par le calcul.

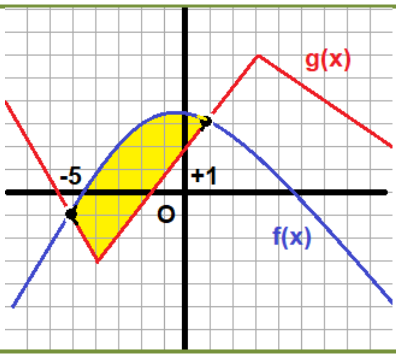
Par exemple pour trouver les points d'intersection de $y =x^2+3x -1$ avec la droite y = 3, on cherche les solutions de l'équation $x^2+3x -1 = 3$ que l'on met sous la forme $x^2+3x -4 = 0$ et on cherche les racines. On trouve x'=1 et x''= –4.

Autre exemple si on nous demande d'étudier les positions relatives de la courbe d'équation $y =x^2+3x$ et de la droite d'équation y = 4.
On dit que la courbe est au –dessous de la droite quand $x^2+3x < 4$ qu'on transforme en $x^2+3x – 4 <0$ et on étudie le signe du polynôme qui est négatif entre les racines c'est-à-dire pour x∈] –4 ; 1[.
C'est donc que la courbe est sous la droite quand x appartient à cet intervalle.

Comparaison de deux fonctions



Les solutions de f(x) =g(x)
Sont les abscisses des points d'intersection des 2 graphes.
Ici f(x)=g(x) a 2 solutions {–5 ;+1}



Les solutions de f(x)>g(x) sont les intervalles sur lesquels le graphe de f(x) est au-dessus du graphe de g(x).
Ici f(x)>g(x) a pour solution]-5;+1[

Là encore le calcul peut nous donner une solution:

Si on cherche les points d'intersection de $f(x) = x^2+ 2x -4$ avec $g(x) = -3x +2$
Il faut résoudre l'équation
$x^2+ 2x -4 = -3x +2$ soit $x^2+ 5x -6 =0$.
On trouve x'= 1 et x'= –6 puis on reporte ces valeurs dans y=–3x+2 pour trouver les ordonnées des points.

Pour étudier les positions relatives de f(x) et g(x) on résout $x^2+ 2x -4 < -3x +2$ pour savoir quand le graphe de f(x) est sous celui de g(x). la solution de $x^2+ 5x -6 <0$ donne pour solution]–6 ; +1[.