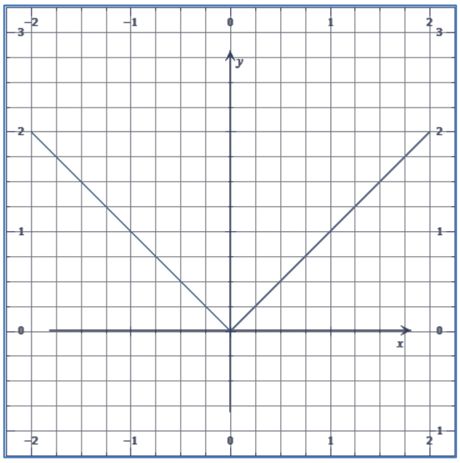
Fonctions

Table des matières

Etude de f(x) = y = |x|



f(x) =|x|

Le domaine de définition de f(x) est ℝ.

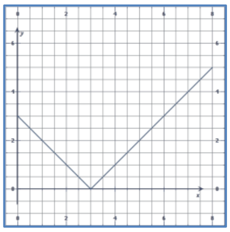
D'après notre définition de la valeur absolue
|x| = x quand x est positif
|x| = – x quand x est négatif
Donc le graphe de f(x) est celui de y = x sur [0; +∞ [
et celui de y = – x sur]- ∞ ; 0]
Les graphes de y = x et y = -x sont les bissectrices des angles formés par les 2 axes. Rappelons que la bissectrice est le lieu des points équidistants des 2 côtés de l'angle, ce qui ici se traduit par |y| = |x|.

La fonction f(x) =|x| est décroissante sur ℝ– et croissante sur ℝ +.
Elle admet un minimum (0) pour x =0 .

Propriétés: |xy| =|x|.|y| $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ |x – y| ≤ |x| + |y| |x + y| ≤ |x| + |y|

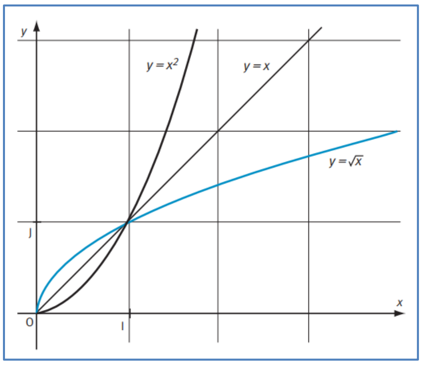
Soient a∈ ℝ et r ∈ ℝ+ "x est dans un intervalle centré en a de rayon r" s'écrit **x∈ [a–r ; a+r]** ou **|x – a| ≤ r**

Généralisation



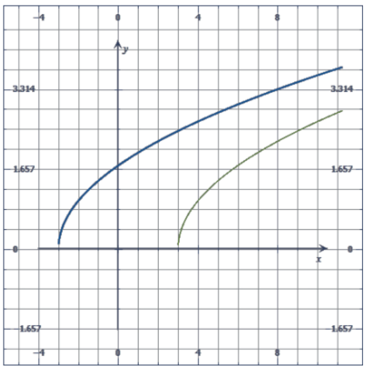
Rappelons que pour étudier, par exemple, f(x) =|x – 3| il faudrait dire que
f(x) = x – 3 pour x – 3 positif c'est-à-dire pour x > 3
et
f(x) = – (x – 3) pour x – 3 négatif c'est-à-dire pour x < 3.
On obtiendrait le graphe ci-contre.

Etude de f(x) = y = $\sqrt{x}$



f(x) = $\sqrt{x}$
Définie seulement pour x ≥ 0. Df = [0 ; +∞[
Le graphe de f(x) est symétrique de celui de g(x)=x^2 par rapport à la droite y=x.
Pour x1, x2 dans Df
x2 > x1 implique $\sqrt{x2} > \sqrt{x1}$ donc la fonction est croissante.
On a f(0) = 0 et f(1) = 1.
La comparaison du graphe de y = $\sqrt{x}$ avec le graphe de y = x montre que
$\sqrt{x}$ > x pour x entre 0 et 1 et $\sqrt{x}$ < x pour x plus grand que 1
En effet, quand on multiplie x par un nombre entre 0 et 1, le résultat est plus petit que x, donc si x est entre 0 et 1, x^2 < x et par passage aux racines x < $\sqrt{x}$

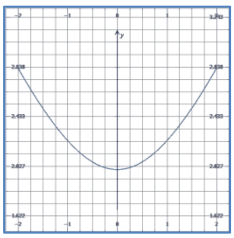
Généralisation



Que se passe-t-il si on veut étudier, par exemple les fonctions,
$g(x) = y = \sqrt{x+3}$
$h(x) = \; y = \sqrt{x-3}$
Le domaine de définition change donc les courbes sont décalées en fonction de ce changement
Ici Df =[–3 ; +∞ [pour y =x+3 et Df=[+3; +∞ [pour y = x –3.

Mais globalement, les courbes gardent la même allure.
C'est normal puisqu'on a g(x) = f(x+3), ce qui traduit une correspondance des graphes par une translation de vecteur $3\vec{\imath}$.

Si maintenant on trouve sous
g(x) = $\sqrt{x^2+4}$
Le domaine de définition
fonction qui est sous la racine



la racine une expression toujours positive

devient ℝ et le graphe de g(x) a le même sens de variation que la
avec notamment des extrémums pour les mêmes valeurs de x.

Approche de la notion de limite

Limite des fonctions "puissance de x". On se propose d'étudier les limites des fonctions de type **f(x) =Kx^n** (avec $K \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$) quand x prend des valeurs extrêmes.
On commence par étudier le comportement de la valeur absolue de f(x). (x → a se lit "x tend vers a")

Ouand l**x**l **→ + ∞**

Il suffit de remplacer x successivement par 10, 100, 1000, 1000000 pour voir comment évolue |f(x)|

- Les valeurs absolues de Kx, Kx^2, Kx^3, … etc deviennent très grandes sans limite supérieure.
- Les valeurs absolues de $\frac{K}{x}$, $\frac{K}{x^2}$, $\frac{K}{x^3}$, elles, deviennent très petites et tendent vers 0.

Quand |**x**| → **0**

Il suffit de remplacer x successivement par $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \dots, \frac{1}{1000000}$ pour voir comment évolue |f(x)|

- Les valeurs absolues de Kx , Kx^2, Kx^3, … etc tendent toutes vers 0.
- Tandis que les valeurs absolues de $\frac{K}{x}$, $\frac{K}{x^2}$, $\frac{K}{x^3}$ deviennent très grandes sans limite $(puisque\ \frac{\mathbf{a}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}} = \mathbf{an})$

L'étude du signe

Une fois qu'on sait si la valeur absolue de f(x) tend vers + ∞ ou vers 0, il faut étudier le signe de f(x), qui dépend du degré de x, du signe de x et du signe de K pour savoir
■ Si quand |f(x)| → +∞ la limite de f(x) est +∞ ou – ∞
■ Ou si quand |f(x)| → 0, f(x) tend vers 0 par valeurs négatives ou par valeurs positives (selon que f(x) <0 ou f(x)>0).

Remarque: l'étude de la limite d'une expression telle que $K\sqrt{|x|}$ ou $\frac{K}{\sqrt{|x|}}$ n'offre pas plus de difficultés.

Limite d'un polynôme de degré 2. P(x) =ax^2 + bx + c

Quand x → 0 ou une valeur finie Xo

P(x) → P(Xo)

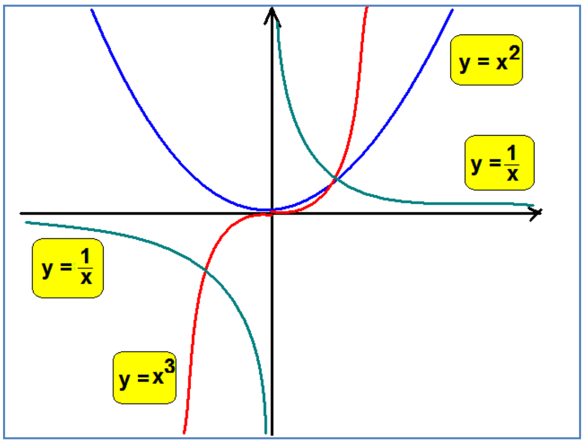
.

Quand | x| → +∞

il suffit de mettre ax^2 en facteur dans P(x). P(x) = ax^2 (1 + $\frac{b}{ax}$ + $\frac{c}{ax^2}$) pour remarquer que quand |x| → ∞ les termes $\frac{b}{ax}$ et $\frac{c}{ax^2}$ qui tendent vers 0 deviennent rapidement négligeables devant le 1 et P(x) va se comporter comme ax^2.
C'est d'ailleurs ce que nous a appris l'étude de la fonction polynôme de degré 2 :
f(x) → + ∞ si a est positif et f(x) → –∞ si a est négatif. Exactement comme ax^2 le ferait.
En mettant ax^n en facteur dans un polynôme de degré n, on démontrerait de la même façon que…

Quand |x| → +∞ un polynôme de degré n se comporte comme son monôme de plus haut degré ax^n.
Et en conséquence, une fraction rationnelle se comporte comme le quotient des monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

On peut prédire le comportement aux limites de certaines fonctions de x quand x devient infini ou tend vers 0.

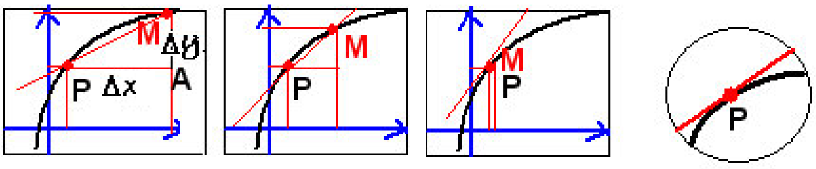


Limite de f(x) quand x → a s'écrit $lim_{x\to a} f(x)$

f(x)	x→+∞	x→-∞	x→0$^-$	x→0$^+$
x^2	f(x)→+∞	f(x)→+∞	f(x)=0	f(x)=0
x^3	f(x)→+∞	f(x)→ -∞	f(x)=0	f(x)=0
$\frac{1}{x}$	f(x)→0$^+$	f(x)→0$^-$	f(x)→ - ∞	f(x)→ +∞
$\frac{1}{x^2}$	f(x)→0$^+$	f(x)→0$^+$	f(x)→+∞	f(x)→+∞

On doit retrouver ces limites sur le graphe de chaque fonction.

Dérivées



Sur ce petit film de 4 images, on voit de gauche à droite comment le point mobile M(x,y) se rapproche du point fixe P(Xp,Yp) en se déplaçant sur le graphe de la fonction y = f(x).

On s'intéresse à la position de la droite (PM) par rapport à la courbe et plus particulièrement à son coefficient directeur. On voit que la droite (PM) d'abord sécante du graphe tend à devenir tangente du graphe (dernière image) quand M rejoint P. Le coefficient directeur de (PM) a= $\frac{Xp-x}{Yp-y}$ tend donc vers le coefficient de la tangente en P quand x → Xp.

f '(Xp) nombre dérivé de f(x) pour x =Xp est le coefficient directeur de la tangente au graphe de f(x) au point P

On peut définir le nombre dérivé f ' (Xp) de plusieurs façons équivalentes:

1 $f'(X_P) = \lim_{x \to X_p} \frac{f(x)-f(X_p)}{x - X_p}$	**2** $f'(X_P) = \lim_{h \to 0} \frac{f(X_p+h)-f(X_p)}{h}$	**3** $f'(X_P) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
1 → 2 , il suffit de poser x = X_P + h	**1→ 3** il suffit de poser f(x) –f(X_P) = Δy (ou Δf) et x – X_P= h = Δx	

Dérivabilité: Une fonction est dérivable en tout point de son domaine de définition où le nombre dérivé existe, c'est-à-dire en tout point où la limite de Δf / Δx quand Δx tend vers 0 existe et prend une valeur finie. Le graphe doit être continu, ne pas présenter de brisure ou de cassure, ne pas avoir de tangente parallèle à l'axe des y.

Fonction dérivée de f : c'est la fonction qui à tout x du domaine où f est dérivable, fait correspondre le nombre dérivé **f '(x).** **f ' : x → f ' (x)** .
Si on connaît la fonction dérivée f '(x), il suffit de donner la valeur X_P à x, f '(X_P), pour avoir le nombre dérivé en X_P

Opérations sur les dérivées (**u, v** sont des fonctions, **u', v'** leur dérivée, **k** un nombre réel)

(ku)' = ku'	(u + v) ' = u' + v'	(uv)' = u'v + uv'	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Dérivées à connaître :

fonction	X^n	Constante k	aX^n	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	Cos (x)	Sin x
dérivée	$n X^{n-1}$	0	naX^{n-1}	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	– sin (x)	Cos x

Sauf les 2 dernières, les dérivées sont déduites de la formule fondamentale $(X^n)' = nX^{n-1}$

Une technique utile
Une fonction composée est une fonction dans laquelle on a remplacé x par une fonction de x [u(x.)]
Si on fait le changement de variable U = u(x) on obtient une fonction simple de U que l'on sait dériver par rapport à U.
Exemples • $\cos(3x^2+4x+2)=\cos(U)$. • $(5x^3+4)^7 = U^7$ • $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{U}$ • $\frac{1}{(6x+3)^4} = \frac{1}{U^4}$
or on a $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta U} \cdot \frac{\Delta U}{\Delta x}$ et par passage à la limite $[f]'_{(x)} = [f]'_{(U)} \cdot [U]'_{(x)}$ autrement dit

Dérivée de f par rapport à x (dérivée cherchée) **=** (**dérivée de f par rapport à U**) **x** (**dérivée de U par rapport à x**)

Par exemple pour trouver la dérivée de $f(x)= (5x^3+4)^7$. On pose $U =5x^3+4$ ce qui donne $f(U) = U^7$.
La dérivée de f(U) par rapport à U est $7U^6$ soit $7(5x^3+4)^6$. La dérivée de U par rapport à x est $15x^2$.
Et la dérivée de f(x) par rapport à x est égale au produit des 2 soit $(15x^2)\,7(5x^3+4)^6 = \mathbf{105x^2\,((5x^3+4)^6}$

Sens de variation d'une fonction
f(x) est croissante sur [a,b] si pour tout x et y ∊ [a,b] $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ >0. Si x_p et x ∈ [a,b] on aura aussi $\frac{f(x)-f(X_p)}{x - X_p} > 0$ et par passage à la limite quand $x \to x_p$: $f'(x_p) > 0$. L'étude du signe de f'(x) permet donc d'étudier le sens de variation de f(x).

Sur un intervalle donné	Si f '(x) < 0	Si f 'x)> 0	Si f '(x) = 0
	f(x) est **décroissante**	f(x) est **croissante**	f(x) est **constante**

Si la dérivée change de signe en x_0, (on a $f'(x_0)=0$) on dit que la fonction admet un extremum local (maximum ou minimum) en ce point.

Fonctions usuelles

Proposons un **plan type d'étude d'une fonction** à travers quelques exemples de type $f(x) = x^n$.

f(x)=x

$\mathbb{R}$ Domaine de définition de f(x)=x	$-\infty$	$+\infty$
Limites de f(x)	$-\infty$	$+\infty$
Signe de la dérivée f '(x)=1	+	
Sens de variation de f(x)=x	$-\infty$ ↗	$+\infty$

f(x)=$\sqrt{x}$

$\mathbb{R}+$ Domaine de définition de f(x)=$\sqrt{x}$	0	$+\infty$
Limites de f(x)	0	$+\infty$
Signe de la dérivée f '(x)= f '(x) =$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	+	
Sens de variation de f(x)=x	0 ↗	$+\infty$

f(x)=x²

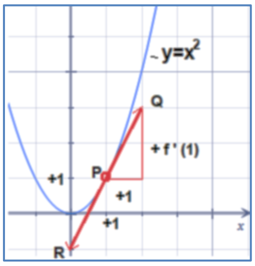
$\mathbb{R}$ Domaine de définition de f(x)=x^2	$-\infty$	0	$+\infty$
Limites de f(x)	$+\infty$		$+\infty$
Signe de la dérivée f '(x)=2x	−	0	+
Sens de variation de f(x)=x^2	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

f(x)=$\frac{1}{x}$

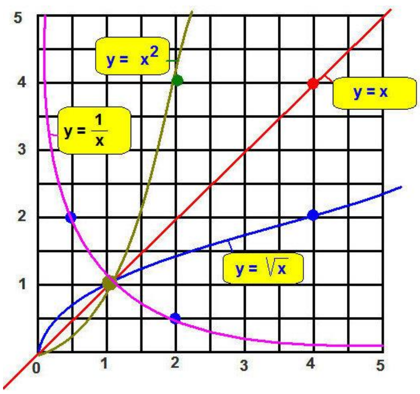
$\mathbb{R}-\{0\}$ Domaine de définition de f(x)= $\frac{1}{x}$	$-\infty$	0		$+\infty$
Limites de f(x)	0 −	$-\infty$	$+\infty$	0+
Signe de la dérivée f '(x)= $-\frac{1}{x^2}$	−		−	
Sens de variation de f(x)= $\frac{1}{x}$	0 − ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	0+

Le tracé du graphe

Lorsque la fonction est paire ou impaire nous savons que le graphe va être symétrique, soit par rapport à l'axe des y, soit par rapport à l'origine O du repère.



Le sens de variation nous donne l'allure du graphe dans les intervalles qui composent le domaine de définition mais on a intérêt à localiser certains points du graphe dans le repère et même à tracer la tangente au graphe en certains points pour obtenir un "moule" de la courbe qui nous aidera à la tracer. Prenons l'exemple de la fonction f(x) =x^2. (figure ci-contre).
On localise un point P (par exemple le point (1,f(1)) = (1,1).
La dérivée de x^2 étant 2x, on sait que le coefficient directeur de la tangente en P est a=f '(1) =2.
Pour tracer la tangente il suffit de partir de P, d'augmenter x de 1 puis d'augmenter y de a =2 ce qui nous situe au point Q. On trace un segment de la tangente [PQ] qu'on prolonge en [RQ].
On sait que le graphe passera par l'origine O et par P en étant tangent au segment [RQ] en P.

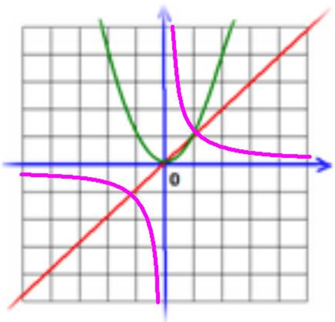


La fonction f(x)=x^2 étant paire, (puisque f(-x)=f(x)) son graphe (en vert) est symétrique par rapport à l'axe des y⟶
f(x)=x et f(x) = 1/x étant impaires (puisque f(-x)= - f(x)) leur graphe (en rouge et carmin) est symétrique par rapport au point O.
Tous les graphes de fonctions f(x) = x^n passent par le point (1,1).
Pour x entre 0 et 1 on a ….

$x^4 < x^3 < x^2 < x < x^{\frac{1}{2}} < x^{-1}$ ….

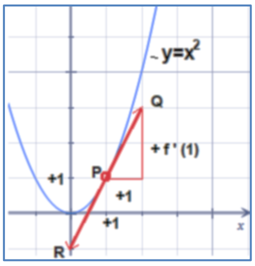
Pour x > 1 c'est le contraire ….

$x^4 > x^3 > x^2 > x > x^{\frac{1}{2}} > x^{-1}$



Problèmes connexes

Trouver y = ax+b, l'équation de la tangente au graphe de f(x) au point P d'abscisse Xo.

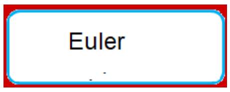


On calcule l'ordonnée de P : Yo = f(Xo).
La dérivée de f(x) = f ' (x). Le coefficient directeur a de la tangente en P a=f '(Xo).
On écrit que la tangente passe par P : Yo = aXo + b ce qui nous permet de trouver b = Yo – aXo.
Exemple pour f(x) = x^2 et Xo = 1.
L'ordonnée de P est f(1) = 1^2 = 1
La fonction dérivée de f(x) est f '(x) = 2x .
Le coefficient directeur de la tangente au point P est a = f '(1) = 2.
La tangente passe par P donc 1 = 2(1) + b d'où b = –1.
L'équation de la tangente est y = 2x – 1.

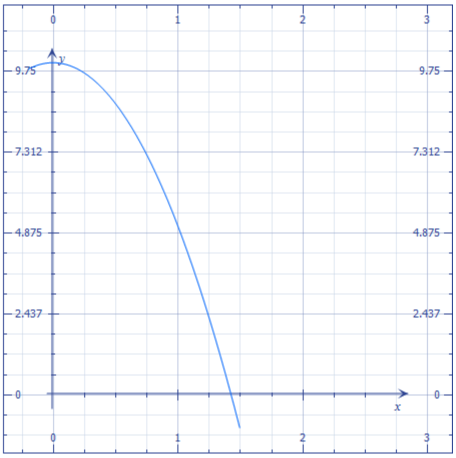
Approximation affine de f(x) en x = a

Si f(x) est dérivable en a, l'équation de la tangente au graphe de f au point (a, f(a)) est une approximation affine de f en ce point.

g(x) = 2x –1 est une approximation affine de f(x) =x^2 en 1. Ce qui signifie que si l'on donne à x une valeur proche de 1, les valeurs de g(x) et f(x) seront très voisines. (g(1,1) = 1,2 et f(1,1)=1,21 différence 0,01) .
Cette méthode est due au mathématicien suisse Euler.
Voir une animation sur ce sujet en cliquant sur ce bouton →
Ce bouton est accessible depuis le menu Lycée si votre navigateur est rétif.



Dérivée d'une distance par rapport au temps



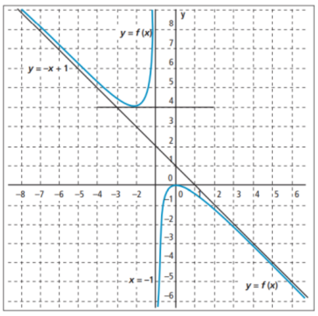
Ce graphe représente la distance au sol d'un objet qu'on laisse tomber d'une hauteur de 10m en fonction du temps de trajet.
En ordonnée la distance au sol en mètres (d), en abscisse le temps de trajet en secondes (t). On a d= f(t).
On observe que l'objet parcourt les 5 premiers mètres en environ 1 seconde et les 5 derniers en moins d'une demie seconde.
La vitesse de l'objet n'est donc pas constante. Son mouvement est accéléré.
Quand la vitesse est constante, l'équation du mouvement est d = vt ou v =$\frac{d}{t}$.
Ici ce n'est pas le cas mais on peut mesurer une vitesse instantanée en disant que sur un très court intervalle de temps, la vitesse est pratiquement constante.
Cela revient à utiliser l'approximation affine en remplacement de la fonction f(t).
Or si au temps t_0, le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse t_0 est a, cela signifie que si le temps augmente de 0,001 secondes, la distance augmentera de 0,001a. Et donc a = $\frac{d}{t}$ est la vitesse instantanée du mobile.

Conclusion

Si l'équation du mouvement d'un mobile est d = f(t), sa vitesse à l'instant t_0 est f '(t_0).
Avec f '(t) fonction dérivée de f par rapport au temps.

Déterminer la position relative de 2 graphes

Par exemple f(x) = – x + 1 – $\frac{1}{x+1}$.



Visiblement quand x va tendre vers +∞ ou vers – ∞ la fraction $\frac{1}{x+1}$ va tendre vers 0 et le graphe de f(x) va se rapprocher du graphe de la droite d'équation g(x) = y = – x +1.
Le problème est de savoir lequel des graphes sera au-dessus de l'autre.
Pour cela, il suffit d'étudier le signe de f(x) – g(x) .
Si on trouve une valeur positive cela signifiera que f(x) > g(x) (courbe au-dessus de la droite) sinon ce sera le contraire.
Ici on trouve que f(x) – g(x) = – $\frac{1}{x+1}$.
Cette valeur est positive pour x → –∞ (courbe au-dessus de la droite) et négative pour x →+∞ (courbe au- dessous)

On peut également vérifier que f(x) – g(x) →0 quand |x| → + ∞ ce qui signifie que la courbe se rapproche indéfiniment de la droite quand la valeur absolue de x tend vers + ∞. On dit que la courbe admet la droite comme **asymptote**.