Cahier de cours

TERMINALE S

Cliquez sur le lien pour atteindre le chapitre

Analyse

Géométrie

Probabilités et statistiques

Suites et fonctions

Limites
Suites numériques
Dérivées
Etude de fonctions
Intégration
Fonctions sin(x) et cos(x)
Généralisation de la notion de puissance
Fonction exponentielle
Fonction logarithme
.

Limites

Remarquer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x} = 0$. $\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{5}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to0-} \dfrac{5}{x} = -\infty$

Opérations sur les limites

Si ✪ est une opération quelconque (somme, produit, quotient ..) et f et g deux fonctions quelconques, en général on a

lim (f ✪ g) = lim f ✪ lim g et si K est un réel quelconque on a lim Kf = K lim f. Mais quelquefois les opérations donnent des **résultats indéterminés** Par exemple $(+\infty) + (-\infty)$ **ou** $0 \times \infty$ **ou** $0 / 0$ **ou** ∞ / ∞.

il y a indétermination quand les 2 opérandes tendent à donner des résultats contradictoires.

Par contre, par exemple, $0 / \infty$ donne 0 à la limite puisque les 2 opérandes tendent à ramener la fraction vers 0.

De même dans $\infty / 0$ ou dans $\infty \times \infty$ les 2 opérandes tendent à tirer l'opération vers ∞ (pas d'indétermination).

Limite d'un polynôme quand $x \to \infty$.

Quand $x \to \pm\infty$ un polynôme $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ se comporte comme son terme de plus haut degré a_nX^n.

On écrira $P(X) \approx a_nX^n$. **En d'autres termes, la limite du polynôme est la limite de a_nX^n.**

Par exemple $\lim_{x\to-\infty} -3x^2 - 2x - 128 = \lim_{x\to-\infty} 3x^2 = (-3)(-\infty)(-\infty) = -\infty$

La limite de $\sqrt{P(x)}$ quand $x \to \infty$ est la limite de $\sqrt{a_nx^n}$ (attention au signe)

Limite d'une fraction rationnelle quand $X \to \infty$

En corollaire : Si les termes de plus haut degré de N(X) et de D(X) sont respectivement a_nX^n et b_pX^p.

On peut écrire $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{N(X)}{D(X)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_nX^n}{b_pX^p} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n}{b_p} X^{n-p}$ (0, ∞ ou $\dfrac{a_n}{b_p}$ selon les valeurs de n et p)

Par exemple quand $X \to +\infty$ $\lim \dfrac{3x^2+4x+7}{5x^2+3x-1} = \lim \dfrac{3x^2}{5x^2} = \dfrac{3}{5}$ $\lim \dfrac{-5x^2+7x-3}{2x+8} = \lim \dfrac{-5x}{2} = -\infty$

Limite d'une fraction rationnelle quand son dénominateur tend vers 0

Si un polynôme $\to 0$ quand $X \to a$ c'est qu'on peut l'écrire sous la forme $P(X) = (X-a)^n (S(X))$.

On peut donc écrire un fraction dont le numérateur $\to 0$ quand $x \to a$ sous la forme $f(x) = \dfrac{(x-a)^n}{(x-a)^d} k(x)$ avec $k(a) \neq 0$. .

Si on pose k(a) =K la limite cherchée est celle de $K(x-a)^{n-d}$ quand $x \to a$: soit 0 , soit K, soit $\pm\infty$ selon la valeur de n–d.

$L = \lim_{x\to2} \frac{3(x+1)}{(x-1)(x-2)} = (\lim_{x\to2} \frac{1}{x-2})(\lim_{x\to2} \frac{3(x+1)}{(x-1)}) = \left(\lim_{x\to2} \frac{1}{x-2}\right)(9)$ si $x\to2^-$, $L \to -\infty$ et si $x\to2^+$, $L \to +\infty$

Plus technique : $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{1-\sqrt{x-1}}{(x-2)(x+3)} = \lim \dfrac{(1-\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x-1})}{(x-2)(x+3)(1+\sqrt{x-1})} = \lim \dfrac{-1(x-2)}{10(x-2)} = -0{,}1$

On dit qu'une fonction f(X) admet une **asymptote** quand son graphe se rapproche indéfiniment d'une droite lorsque X ou f(X) tendent vers l'infini. C'est cette droite qui porte alors le nom d'asymptote de la fonction.

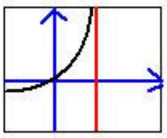
Il y a **asymptote verticale** si $f(x) \to \pm\infty$ quand $X \to c$ (valeur finie) . L'asymptote est la droite d'équation X = c.

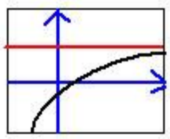
Il y a **asymptote horizontale** si $f(x) \to b$ (valeur finie) quand $X \to \pm\infty$. L'asymptote est la droite d'équation Y = b.

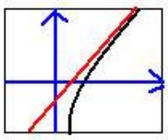
Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ on a une **asymptote oblique** ou une **branche infinie**.

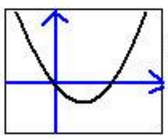
il y a **asymptote oblique** si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ (valeur finie).

L'asymptote a pour équation Y = aX + b avec $b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax]$.


asymptote verticale


asymptote horizontale


asymptote oblique


branche infinie

Pour savoir si une courbe d'équation y = f(x) est au dessus ou au dessous d'une droite d'équation y = ax + b (ou y =b) il suffit d'étudier le signe de f(x) – (ax + b) quand x est dans le domaine qui nous intéresse.

Ce signe est positif si la courbe est au dessus de la droite.

Suites

2 définitions possibles pour les suites. Dans ce qui suit $n \in \mathbf{N}$

- terme général défini de façon explicite $U_n = f(n)$, par exemple $U_n=3n+7$ (calcul direct de tous les termes)
- mécanisme de construction défini par récurrence $U_{n+1}=f(Un)$ par exemple $U_0=7$ et $U_{n+1}=3U_n + 4$.

Raisonnement par récurrence: On vérifie qu'une propriété est vraie pour les premiers rangs. On suppose que la propriété est vraie pour le rang n. Et on démontre que si elle est vraie pour le rang n, alors elle est vraie pour le rang n+1.
Par exemple: démontrer que $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11. Vrai pour n=1, Démontrer $10(10^n-(-1)^n)=10^{n+1}-(-1)^{n+1} \pm 11$

- (U_n) **croissante** : $U_{n+1} > U_n$ ou $U_{n+1} - U_n > 0$ ● U_n **décroissante** $U_{n+1} < U_n$ ou $U_{n+1} - U_n < 0$
- (U_n) **stationnaire** : $U_{n+1} = U_n$ ● (U_n) **alternée** $U_{n+1} / U_n < 0$ ● (U_n) **périodique** $\exists P$ tel que $U_{n+P} = U_n$
- (U_n) **minorée** $\exists m$ tel que tout n $U_n \geq m$ ● (U_n) **majorée** $\exists M$ tel que tout n $U_n \leq M$
- (U_n) **bornée** : U_n majorée et minorée ● (U_n) **monotone** si un seul sens de variation ou stationnaire.
- (Un) et (Vn) **adjacentes** si leurs sens de variation sont différents et $Un - Vn \to 0$ quand $n \to \infty$

(U_n) **convergente** si U_n tend vers une limite finie L quand $n \to \infty$

● **lim U_n = L si quelque soit $\varepsilon > 0$ et aussi petit que l'on veut l'inéquation $|U_n - L| < \varepsilon$ admet une solution de type n>N (N étant un rang fonction de ε).** Il existe d'autres définitions équivalentes de la convergence. Ci-dessous des familles de **suites de références** que l'on sait convergentes de limite 0 :

● $U_n = n^{-k}$ (avec k > 0) Par exemple $1/n^2$ ou $1/\sqrt{n}$ ● $U_n = k^{-n}$ avec k >1 (par exemple $1/2^n$) ou $U_n=K^n$ ($-1< k < 1$)

- Si Un est croissante et majorée ou décroissante et minorée, alors Un converge.
- Si Un = f(n) et que f(x) admet une asymptote horizontale L, alors Un a pour limite L
- Si Vn converge vers 0 et à partir d'une certain rang Un < KVn (avec K > 0) alors Un converge vers 0.
- Un converge si elle est la somme, ou le produit 2 suites convergentes.
- Si V_n et W_n sont 2 suites convergentes vers L et que pour n>N on a $V_n \leq U_n \leq W_n$ alors lim U_n= L

Exemple $U_n = 2n^2 / (n^3 +1) < 2n^2 / n^3$ donc $0 < U_n < 2(1/n)$ et Un converge vers 0.

(U_n) **divergente** si elle ne converge pas. En particulier une suite telle que lim $(U_n) = \pm\infty$ diverge. C'est la cas des **suites de référence** suivantes :

● $Un = n^k$ avec k > 0 (par exemple **n**, $\mathbf{n^2}$ ou $\sqrt{n}$) ● $Un = k^n$ avec k > 1 (par exemple 2^n)

Une suite peut être bornée et divergente (exemple cos (n)).

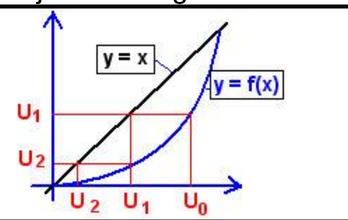
● **Une suite tend vers +∞ si tout A>0 (A aussi grand que l'on veut), l'inéquation Un > A a une solution de type n>N avec N fonction de A.**

● **Une suite tend vers –∞ si tout A<0 (A aussi petit que l'on veut), l'inéquation Un < A a une solution de type n>N avec N fonction de A.**

- si $U_n = f(n)$ et si quand $x \to \infty$ lim f(x)= ∞ alors lim $U_n = \infty$
- On peut aussi démontrer que lim $U_n = \infty$ en la comparant à une suite de référence.

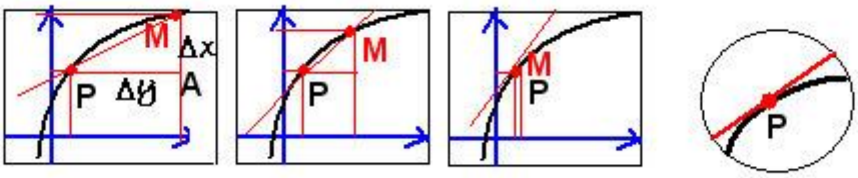
par exemple $2^n = (1+1)^n = 1+n +....$ (début du développement binôme de newton) et n a pour limite ∞.

Suite arithmétique	**Suite géométrique**
définition : $\mathbf{U_{n+1}=U_n + R}$ (**R** appelé **raison**)	définition : $\mathbf{U_{n+1} = U_n.Q}$ (**Q** appelé **raison)**
terme général : $\mathbf{U_n = U_0 + nR}$	terme général : $\mathbf{U_n = U_0.Q^n}$
lien entre rang **n** et rang **p** : $\mathbf{U_n = U_p+ (n-p)R}$	lien entre rang **n** et rang p : $\mathbf{U_n = U_p.Q^{n-p}}$
somme partielle des n premiers termes $S_n = U_0+U_2+...+U_{n-1} = \dfrac{n(U_0+U_{n-1})}{2}$	somme partielle des n premiers termes $Sn=U_0+U_1+...+U_{n-1} = U_0 \dfrac{Q^n - 1}{Q-1}$
$1+2+3+.....+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	factorisation de $1-x^n$ pour $x \neq 1$ $1+x+x^2+...+x^{n-1} = \dfrac{1-X^n}{1-X}$
relation 3 termes consécutifs $\mathbf{2U_{n+1} = U_n + U_{n+2}}$	relation 3 termes consécutifs $\mathbf{(U_{n+1})^2 = (U_n)(U_{n+2})}$
toujours divergente	converge vers **0** si $\mathbf{|Q|<1}$. diverge si $\mathbf{|Q|>1}$.



interprétation graphique : les suites définies par une récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$.
(ici $U_{n+1}=(U_n)^2$ donc $f(x)=x^2$) On trace le graphe de f(x) et le graphe de la droite y = x.
On part de $x=U_0$ (ici U_0 = 0,8), grâce à la courbe on cherche le point $U_1 = f(U_0)$ sur l'axe des y, puis grâce à la droite y = x on situe le point $x = U_1$ sur l'axe des x.
Et on recommence le processus, on cherche $U_2 = f(U_1)$ grâce à la courbe puis, grâce à la droite le point $x = U_2$. Et ainsi de suite. Ici il semble que U_n converge vers 0.

Dérivées



Nombre dérivé : soit un point P (X_P, Y_P) appartenant au graphe d'une fonction f(x).

On note **f '(X_P)** le nombre dérivé de la fonction f en P (ou en X_P). On le définit de 3 façons possibles :

1 $f'(X_P) = \lim_{x \to X_p} \frac{f(x)-f(X_p)}{x-X_p}$ **2** $f'(X_P) = \lim_{h \to 0} \frac{f(X_p+h)-f(X_p)}{h}$ **3** $f'(X_P) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

1 → 2 , il suffit de poser $x = X_P + h$ **1→ 3** il suffit de poser $f(x) - f(X_P) = \Delta y$ (ou Δf) et $x - X_P = h = \Delta x$.
inverser X_P et x dans les formules ne change rien. Si on considère que x et y sont les coordonnées d'un point M différent de P, le rapport $\Delta y / \Delta x$ dont on cherche la limite est en fait le coefficient directeur de la droite PM, et on cherche sa limite quand M tend vers P. C'est-à-dire quand la sécante PM tend vers la tangente au graphe en P. Il est donc logique de considérer que si le nombre dérivé de f en P existe, il est tout bonnement égal au coefficient directeur de la tangente au graphe de f en P.

● **Soit y = ax + b équation de la tangente au graphe de f en P(X_P, f(X_P)) alors a = f ' (X_P).**

Dérivabilité : une fonction est dérivable en tout point de son domaine de définition où le nombre dérivé existe, c'est-à-dire en tout point où la limite de $\Delta f / \Delta x$ quand Δx tend vers 0 existe et prend une valeur finie. Le graphe doit être continu, ne pas présenter de brisure ou de cassure, ne pas avoir de tangente parallèle à l'axe des y.

Fonction dérivée de f : c'est la fonction qui à tout x du domaine où f est dérivable, fait correspondre le nombre dérivé f '(x). f ' : $x \rightarrow f'(x)$.
Si on connaît la fonction dérivée f' (x), il suffit de donner la valeur X_P à x , f ' (X_P), pour avoir le nombre dérivé en X_P

Opérations sur les dérivées **u, v** sont des fonctions, **u', v'** leur dérivée, **k** un nombre réel)

● $(ku)' = ku'$ ● $(u + v)' = u' + v'$ ● $(uv)' = u'v + uv'$ ● $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Formule fondamentale : **la dérivée de X^n est nX^{n-1}** (avec n entier relatif)

Dérivées à connaître :

● dérivée d'une constante **(k) ' = 0** ● dérivée d'un terme de polynôme **$(aX^n)' = naX^{n-1}$**

● dérivée de l'inverse d'une puissance de x $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}}$ ● dérivée de la fonction racine $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Toutes ces dérivées sont déduites de la formule fondamentale

Autres dérivées usuelles

● dérivée de sin x : **(sin x)' = cos x** ● dérivée de cos x **(cos x) ' = – sin x**

Une technique très utile

Une fonction composée est une fonction dans laquelle on a remplacé x par une fonction de x [u(x.)]
Si on fait le changement de variable U = u(x) on obtient une fonction simple de U que l'on sait dériver par rapport à U.

Exemples ● $\cos(3x^2+4x+2)=\cos(U)$. ● $(5x^3+4)^7 = U^7$ ● $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{U}$ ● $\frac{1}{(6x+3)^4} = \frac{1}{U^4}$

or on a $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta U} \cdot \frac{\Delta U}{\Delta x}$ et par passage à la limite $[f]'_{(x)} = [f]'_{(U)} \cdot [U]'_{(x)}$ autrement dit

dérivée de f par rapport à x (dérivée cherchée) = **(dérivée de f par rapport à U) ● (dérivée de U par rapport à x)**
Par exemple pour trouver la dérivée de $f(x)= (5x^3+4)^7$. On pose $U = 5x^3+4$ ce qui donne $f(U) = U^7$.
La dérivée de f(U) par rapport à U est $7U^6$ soit $7(5x^3+4)^6$. La dérivée de U par rapport à x est $15x^2$.
Et la dérivée de f(x) par rapport à x est égale au produit des 2 soit $(15x^2)\, 7(5x^3+4)^6 = \mathbf{105x^2\,((5x^3+4)^6}$

Sens de variation d'une fonction

f(x) est croissante sur [a,b] si pour tout x et y $\in$ [a,b] $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$ autrement dit $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0$

L'étude du signe de f'(x) permet d'étudier le sens de variation de f(x). Sur un intervalle donné

● si **f '(x) < 0** , f(x) est **décroissante** ● si **f 'x)> 0**, f(x) est **croissante** ● Si **f '(x) = 0**, f(x) est **constante**.

Si la dérivée change de signe en x_0, (on a $f'(x_0)=0$) on dit que la fonction admet un extremum local (maximum ou minimum) en ce point.

Plan d'étude d'une fonction

1) Domaine de définition

Notamment on exclut de $\mathbb{R}$ les valeurs de X qui annulent un dénominateur ou les valeurs de X qui rendent négative une expression figurant sous une racine.

2) Parité, imparité, périodicité

Une fonction est paire si **f(X) = f(–X).** Graphe symétrique par rapport à l'axe des Y .

Une fonction est impaire si **f(X) = –f(–X)** . Graphe symétrique par rapport à O

Une fonction est périodique s'il existe un nombre P tels que pour tout X, **f(X+P) = f(X)**.

Ces propriétés permettent de restreindre l'étude à $\mathbb{R}^+$ ou à une période.

3) Calcul des limites aux bornes du domaine de définition

Voir le chapitre intitulé « limites ».

on détecte notamment l'existence d'asymptotes

horizontale $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$, verticale $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \pm\infty$ ou oblique $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

l'asymptote oblique a une équation $\mathbf{y = ax + b}$ avec $\mathbf{a}$ = lim f(x)/x et $\mathbf{b}$ =lim [f(x) – ax]

a, b et c étant des nombres réels

4) Calcul de la fonction dérivée et étude de son signe

L'expression de la fonction dérivée f '(x) nous renseigne sur la dérivabilité de f (x).

L'étude du signe de la dérivée utilise les techniques habituelles, appliquées, le plus souvent, aux polynômes du premier ou du second degré ou aux fractions rationnelles. On en déduit le sens de variation de la fonction, d'une limite du domaine de définition à l'autre, en passant par d'éventuels extremums (minimums ou maximums) quand la dérivée s'annule en changeant de signe.

Si la fonction admet des extremums pour $X=X_1$, $X= X_2$, ...on calculera les valeurs de ces extremums ($f(X_1)$, $f(X_2)$, ...) et on les fera figurer dans le tableau de variation.

5) tracé du graphe

On localisera si possible les points où la courbe coupe les axes (f(0) et solutions de f(x) =0). On tracera d'éventuelles asymptotes. Si nécessaire on situera certains points intermédiaires du graphe avec le tracé des tangentes au graphe en ces points. On obtient ainsi une sorte de « coffrage » dans lequel la courbe doit se couler sans heurt ni contradiction.

6) continuité

f(x) est continue sur [a,b] si son graphe n'admet pas de discontinuité sur cet intervalle

- f(x) continue sur [a,b] si pour tout nombre c appartenant à cet intervalle $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$
- Si f(x) dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$, f(x) est continue sur cet intervalle
- Si f(x) continue sur [a,b], pour tout nombre k contenu dans cet intervalle l'équation f(x)=k admet au moins une solution

7) problème annexes

- déterminer une équation y = ax + b de tangente au graphe au point P d'abscisse X_0.

Pour cela on commence par calculer $f(X_0)$ ordonnée de P. Puis on calcule a = f 'X_0).
puis on calcule b en écrivant que P appartient à la tangente c'est-à-dire $f(X_0) = f'(X_0).X_0 + b$.

- Quelquefois on nous demande d'utiliser le théorème selon lequel si f(X) est continue sur [a,b], la courbe admet entre a et b au moins une tangente de coefficient directeur $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, c'est-à-dire une tangente // à la droite qui relie les points [a,f(a)] et [b,f(b)]
- déterminer les points d'intersection du graphe de f(x) avec une droite ou une courbe d'équation y=g(x) . Pour cela il faut résoudre l'équation f(x) = g(x).
- Quelquefois on nous demande simplement d'utiliser le théorème selon lequel, si f(x) est monotone et continue sur [a,b], pour tout réel K compris entre f(a) et f(b), l'équation f(x) = K admet une solution et une seule.
- déterminer la position relative du graphe de f(x) et d'une droite ou une courbe d'équation y=g(x).

pour cela il faut résoudre (ou démontrer) par exemple f(x) > g(x) (f au dessus de g)

Primitives et intégrales

Primitive : F(x) primitive de f(x) si et seulement si la dérivée de F(x) est f(x).

- Si **F(x)** est une primitive de **f(x)** , **F(x) + K** en est une autre (**K** = constante)
- toutes les primitives de **f** sont de la forme **F(x) + K**
- **f(x)** continue admet au moins une primitive
- Il existe une seule primitive **F(x)** de **f(x)** telle que **F(a)=b**

Intégrale :

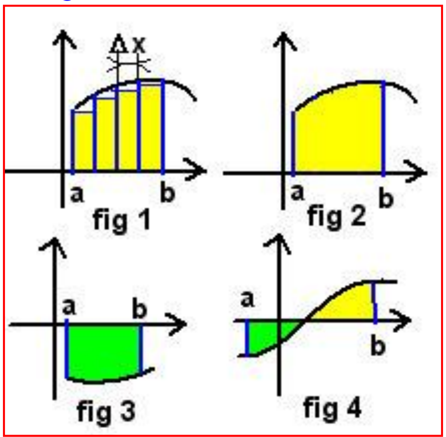


Figure 1 : aire colorée en jaune = Σ f(x_i) Δx.

Figure 2 : si Δx ➜ dx ➜0 l'aire est notée $\int_a^b f(x)dx$ qui se lit « somme de x= a à x=b de f(x)dx » ou encore « intégrale de a à b de f(x) dx ».

Figure 3 : si f(x) < 0 sur l'intervalle [a,b] l'aire $\int_a^b f(x)dx$ est négative.

Figure 4 : si le signe de f(x) change sur [a,b] l'aire est la somme de parties négatives et de parties positives et il pourrait arriver que cette aire soit nulle, alors qu'elle a une réalité physique.

Loi fondamentale : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ Où F(x) est une primitive de f(x).

- **Différentielle** : Par définition de la dérivée on a $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta x} = \dfrac{dF}{dx}$ =F'(x) = f(x) et donc **dF=F'(x).dx**

dx et dF sont les différentielles de x et de F. dF= variation de F correspondant à une très petite variation dx de x.

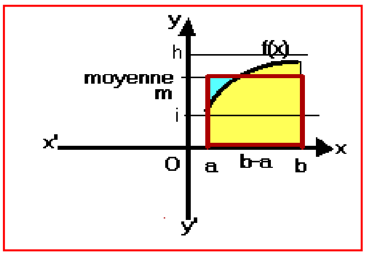
On retient ● df= f '(x).dx ● $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$ ● $\int_a^b df = f(b) - f(a)$.

Propriétés de l'intégrale : ● (relation de Chasles) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

(linéarité) ● $\int_a^b K.f(x) = K.\int_a^b f(x)$ (K réel quelconque) ● $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)$

● (inversion des bornes) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ ● (majoration) $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$ (voir figure 4)

Moyenne d'une fonction sur [a,b]



Quelle que soit l'aire **S=**$\int_a^b f(x)$, il existe une valeur moyenne **m** telle que l'aire du rectangle de largeur **m** et de longueur **(b - a)** soit égale à **S**.

m(b-a) =$\int_a^b f(x)dx$.

On peut donc évaluer **la moyenne m de f sur [a,b]** .

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

Intégration par changement de variable

calculer I = $\int_1^3 (x+1)^2 dx$

On sait que $x^3/3$ est une primitive de x^2 mais quelle est la primitive de $(x+1)^2$?

1) On pose t = x + 1 (changement de variable)➜$(x+1)^2=t^2$.

2) on calcule dx en fonction de dt (et t). x =t–1 donc dx=dt.

3) on calcule dans quelles limites varie t quand x varie de 1 à 3. Ici t = x + 1 varie de 2 à 4.

4) on réécrit l'intégrale en procédant à tous les changements I = $\int_2^4 t^2 dt$

5) et comme on connaît la primitive de t^2 , on sait calculer l'intégrale.

Intégration par parties

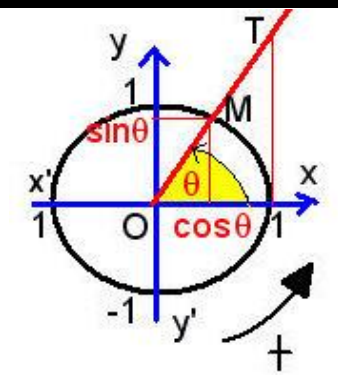
On utilise la propriété suivante : si f=uv alors f '= u'v+v'u ou **d(uv) = udv + vdu**

calculer **I =** $\int_0^{\Pi/2} x \cos x \, dx$. On pose **I = ∫ UdV** soit **x = U** et **dV = (cos x) dx** d'où on tire **dU = dx** et **V = sin x**

On a **d(UV)** = **= UdV**+ **VdU** soit d(x sin x) = x cos x dx + sin x dx et en intégrant **∫ d(x sinx)** = **I** + **∫ sin x dx**

∫d(xsinx) = [x sin x] de 0 à π/2 et **∫ sin x dx** = [– cos x] de 0 à π/2 ce qui permet de calculer **I**.

Fonctions circulaires sin(x) et cos(x)



Un repère orthonormé (O,i,j) .Les axes x'Ox et y'Oy. Le cercle de centre O et de rayon 1.

La longueur de la circonférence d'un cercle de rayon 1 est 2π. L'angle (Ox , OM) intercepte un arc de longueur proportionnelle à sa mesure. On définit la mesure de cet angle en **radians**, comme la longueur de l'arc qu'il intercepte. Si on décrit les angles dans le sens positif conventionnel on a donc les mesures suivantes :

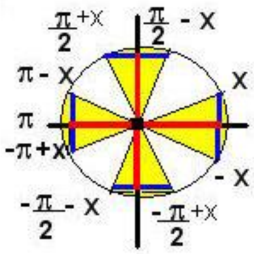
(Ox , Oy) = π/2 , (Ox , Ox') = π, (Ox,Oy') = 3π/2, (Ox ,Ox) = 0 ou 2π. Mais on peut aussi décrire les angles dans le sens négatif et on a (Ox, OM) = θ ou –2π + θ selon le sens choisi.. On peut aussi faire plusieurs tours du cercle avant de s'arrêter en M et on a (Ox, OM) = θ ou θ + 2kπ. Pour éviter ces ambiguïtés, on définit la **mesure principale** d'un angle comme sa valeur située entre –π et +π.

Cet angle correspond au plus petit arc reliant (1,0) à M.

Autre remarque importante, si (Ox ,OM) = x , les coordonnées de M dans le repère orthonormé de centre O sont M (cos x , sin x) , on peut lire directement les valeurs de ces lignes trigonométriques en projetant le point M sur les axes. En outre, si la tangente au cercle en (1, 0) coupe la droite OM en T, l'ordonnée de T est tan (x) .

On découvre que selon le quadrant où se trouve M, sinus (x), cosinus(x) ou tangente(x) peuvent être positifs ou négatifs.

Le sinus et le cosinus varient entre –1 et +1 , la tangente entre –∞ et +∞ .



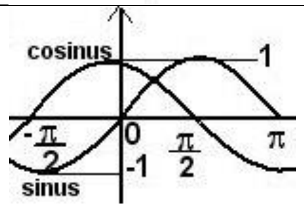
lignes trigonométriques déduites de celles de x :

En bleu :

sin (x) = cos (π/2 –x) = – cos (π/2 +x) = sin (π –x)= –sin(–π+x)= –cos(–π/2 –x) etc …

En rouge :

cos (x)=cos(–x) = sin(π/2–x)=sin(π/2 +x) = –cos(π–x) = –cos(–π+x) = –sin(–π/2–x) etc…



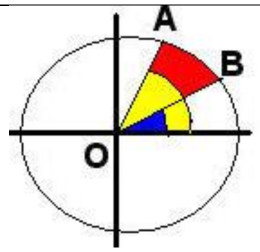
fonctions sinus(x) et cosinus (x).

Ces fonctions sont définies sur R, continues, dérivables, périodiques de période 2π [f(x) = f(x+2π)], à valeurs dans l'intervalle [–1 ; +1]. Cos (x) est paire et sin (x) impaire.

Le graphe de sin(x) passe par l'origine, le graphe de cos(x) passe par (0,1) il est obtenu à partir de celui de sin (x) par une translation de vecteur (–π/2 , 0) .

La dérivée de **sin(x)** est **cos (x),** la dérivée de **cos(x)** est **–sin(x)** (observez qu'elle est négative sur [0,π])

De "dérivée de sin(x) pour x =0 est cos(0) =1" on déduit que $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ (définition du nombre dérivé pour x =0)



(**formules d'addition**) . En jaune l'angle a , en bleu l'angle b, en rouge l'angle a – b.

Ecrivons le produit scalaire $\vec{OA} * \vec{OB}$ = 1x1xcos(a–b)= cos(a-b)= cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)

Puis en remplaçant b par – b cos (a + b) = cos(a) cos (b) – sin(a)sin(b)

En remplaçant a par π/2– a sin (a – b) = sin(a) cos(b) – cos(a) sin (b)

En remplaçant b par – b sin (a + b) = sin(a) cos(b) + cos(a)sin(b)

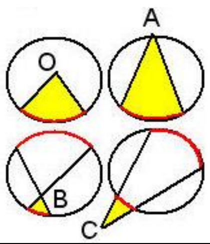
En remplaçant b par a Sin (2a) = 2 sin(a)cos(a) et $\cos(2a)=\cos^2(a)–\sin^2(a)$

En écrivant tan(a+b) = sin(a+b)/cos(a+b) puis en divisant numérateur et dénominateur par cos(a)cos(b) on trouve

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

n'oublions pas la relation fondamentale $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

et en divisant par $\cos^2 x$ $\tan^2 x = (1/\cos^2 x) – 1$



Angles au centre, inscrits, externes, internes.

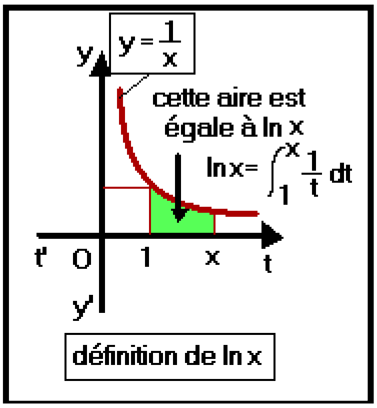
En outre il faut savoir que dans un cercle

L'angle **au centre O** de mesure θ intercepte un arc de mesure θR

L'angle **inscrit A** mesure la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc (en rouge)

Dans les 2 dessins qui suivent , si les angles au centre qui interceptent les 2 arcs rouges mesurent θ et µ,(avec θ > µ) l'angle interne B mesure $\frac{\theta+\mu}{2}$ et l'angle externe C mesure $\frac{\theta-\mu}{2}$.

Logarithme



la fonction logarithme népérien (ln(x)) est définie à partir du graphe de 1/x comme la surface indiquée en vert sur le dessin, soit **$\ln(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$**

La valeur de cette aire dépend du choix de x

X	$x \leq 0$	$0 < x \leq 1$	$x = 1$	$x > 1$
ln (x)	non défini	négatif	nul ln(1) = 0	positif

L'aire devient négative et très grande si **$x \to 0$** **($\ln(x) \to -\infty$)**

L'aire devient positive et très grande si **$x \to +\infty$** **($\ln(x) \to +\infty$)**

L'aire est égale à **1** pour **x = e** (**e = 2,718**...) (**ln(e) = 1**)

En s'appuyant sur la définition on démontre facilement que **ln(x) est une primitive de $\frac{1}{x}$**

En effet si c'est le cas $\int_1^x \frac{1}{t}dt = [\ln(t)]_1^x$ **= ln(x) – ln(1) = ln (x)** le résultat attendu.

propriétés ● ln **1** = 0 ● ln **e** = 1 (e=2,718...) ● ln (a.b) = ln a + ln b d'où l'on déduit :

● $\ln a^n = n \ln a$ ● $\ln \sqrt{a} = ½ \ln a$ ● $\ln(1/b) = -\ln b$ ● $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$

Logarithme de base a **(avec a strictement positif et différent de 1):**

$\log_a x$ = $\boxed{\frac{\ln x}{\ln a}}$. ● On a donc **$\log_e x$ =** $\frac{\ln x}{\ln e}$ **= ln x** (ln log de base e) ● **$\log_b x$ =** $\boxed{\frac{\log_a x}{\log_a b}}$

● Quelle que soit la base **a** : **$\log_a a = 1$** et **$\log_a a^n = n$** (en particulier **ln e = 1** et **$\ln e^n = n$**)

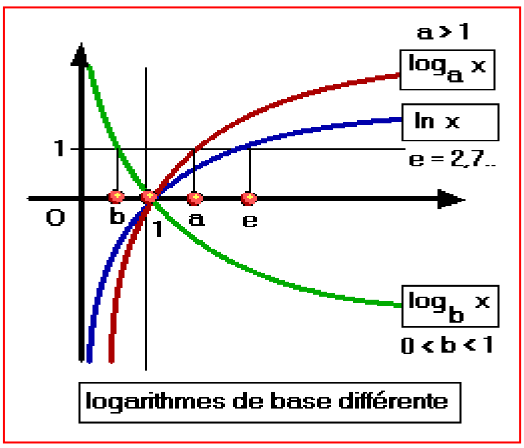
Par exemple **$\log_{10}(1000) = 3$** ,puisque **$1000 = 10^3$** ou **$\log_{10}(0{,}001) = -3$** puisque **$0{,}001 = 10^{-3}$**

● La fonction **$\log_a x$** étant bijective **: $\log_a x = \log_a y$** équivaut à **x = y**

Dérivée ● $[\ln(x)]' = \boxed{\frac{1}{x}}$ ● $[\log a(x)]' = \boxed{\frac{1}{x \ln a}}$ ● si f(x)> 0, $[\ln(f(x))]' = \boxed{\frac{f'(x)}{f(x)}}$

Inversement : si f(x) est >0 sur un intervalle, la primitive de $\frac{f'(x)}{f(x)}$ est ln (fx) .

Graphe



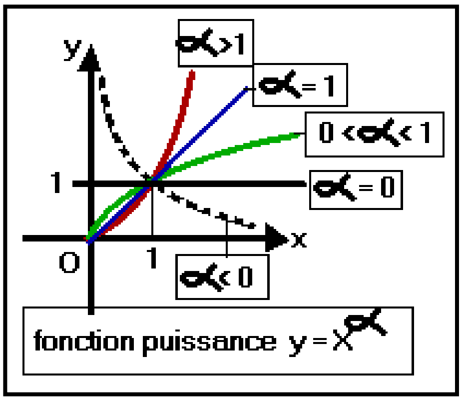
La fonction **ln x** n'est définie que pour **x > 0** à cause de la discontinuité du graphe de **1/t** pour **t = 0** .
La dérivée **1/x** est toujours positive pour **x > 0** donc
ln x est strictement croissante.
Mais la fonction croit beaucoup plus lentement que la plupart des autres fonctions usuelles comme **y = x** , **$y=x^2$** et même **$y=\sqrt{x}$**
On a ln 1 = 0
ln x > 0 pour **x > 1** et **quand x⇨+∞ , ln x ⇨ + ∞**
ln x < 0 pour **x < 1** et **quand x ⇨0^+ , ln x ⇨ - ∞**

$\log_a x$ est déduite de **ln x** par division par la constante **ln a** qui peut être plus grande ou plus petite que **1** et même négative quand **a** est entre **0 et 1** (courbe décroissante).

Généralisation de la notion de puissance

forme de l'exposant p	p entier relatif	p de type 1/n	p rationnel	p irrationnel
signification de x^p	$x^2 = x.x$ $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$	$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x^{\frac{2}{3}} = x^{2.\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ $x^{1,28} = x^{\frac{128}{100}} = (\sqrt[100]{x})^{128}$	il existe 2 rationnels q et r tels que q < p < r et q et r aussi proches de p que l'on veut. Quand p est irrationnel on définit x^p comme la limite commune de X^q et X^r quand q et r tendent vers p.

En somme quels que soient **a**, un réel <u>strictement positif</u> et **b** un <u>réel quelconque</u>, l'expression $\mathbf{a}^{\mathbf{b}}$ a un sens et peut faire l'objet d'un calcul. Si la fonction puissance X^p est définie en règle générale pour X strictement positif, on peut , (selon la valeur de p) la prolonger quelquefois en continuité soit en 0 ($\sqrt{\mathbf{x}}$ mais pas $\mathbf{x}^{-1}$) , soit même sur R (X^2)



Fonction puissance $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}^{\alpha}$ (x>0 , α réel)

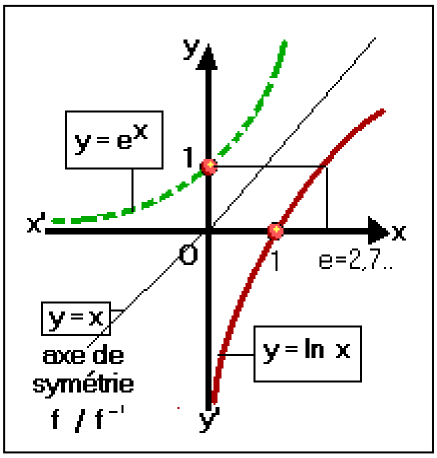
Voici l'allure du graphe sur R^{+*} selon la valeur de α .

dérivée : $(\mathbf{X}^{\alpha})' = \alpha \mathbf{X}^{\alpha-1}$ est du signe de α (croissance ou décroissance selon le signe de α) .

Pour **α > 1** on imagine $\mathbf{X}^2$

Pour **0 < α < 1** on imagine $\sqrt{\mathbf{x}} = \mathbf{X}^{½}$

Pour **α < 0** on imagine $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{-1}$



Fonction exponentielle $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{e}^{\mathbf{x}}$

(**e** est le nombre vérifiant **ln (e) = 1 . e = 2,718...)**

On définit la fonction **exponentielle de x** notée $\mathbf{e}^{\mathbf{x}}$ comme la fonction réciproque de **ln x** .

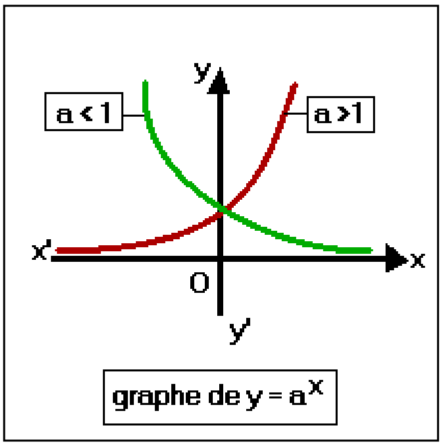
$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$.

● $f \circ f^{-1} = I$ donne **ln (e^x) =x ln e = x**

● $f^{-1} \circ f = I$ donne $\mathbf{e}^{(\ln x)} = \mathbf{x}$

Le graphe d'une fonction et celui de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à droite y=x

Dérivée e^x strictement positive comme la fonction



Fonction exponentielle de base a (a>0) $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{a}^{\mathbf{x}}$

a^x est la fonction réciproque de $\log_a x$

● $x=\log_a y$ équivaut à $y=a^x$. ● a^x a les mêmes propriétés que e^x

Dérivée $(\mathbf{a}^{\mathbf{x}})' = (\mathbf{\ln a})\mathbf{e}^{\mathbf{x\ln a}} = (\mathbf{\ln a})\mathbf{a}^{\mathbf{x}}$

a étant strictement positif, $\mathbf{a}^{\mathbf{x}}$ est toujours positif mais **ln a** pouvant être négatif , la fonction peut être croissante (**a>1**) ou décroissante (**a<1**) . Quand **a > 1** le graphe de $\mathbf{a}^{\mathbf{x}}$ ressemble à celui de $\mathbf{e}^{\mathbf{x}}$ mais la fonction croit et décroît plus vite si **a > e** et elle croît ou décroît moins vite si **a < e**

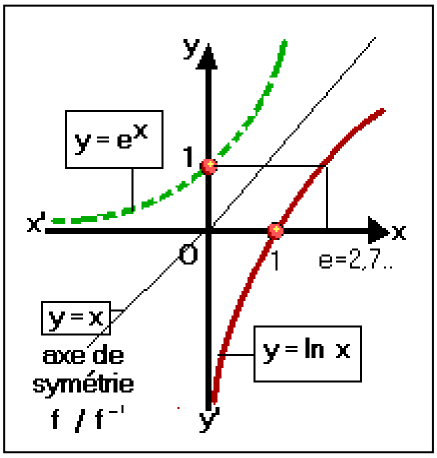
Exponentielle

Fonction exponentielle $x \Rightarrow e^x$ (**e** est le nombre vérifiant **ln (e) = 1** . **e = 2,718...)**

On définit la fonction **exponentielle de x** notée e^x comme la fonction réciproque de **ln x** .

$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$.● $f \circ f^{-1} = I$ donne $\ln(e^x) = x \ln e = x$ ● $f^{-1} \circ f = I$ donne $e^{(\ln x)} = x$

Propriétés ● $e^0 = 1$ ● $e^1 = e$ ● $e^x e^y = e^{x+y}$ ● $(e^x)^n = e^{xn}$ ● $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ ● $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$

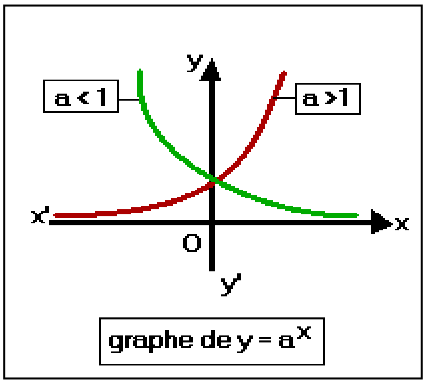


Dérivée ● $(e^x)' = e^x$

$(e^{f(x)})' = f'(x).e^{f(x)}$ par exemple $(e^{2x+3})' = 2e^{2x+3}$

Le graphe d'une fonction et celui de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à droite y=x

- **Df = ℝ .** e^x strictement croissante
- $e^x > 0$ pour tout **x**
- $e^0 = 1$
- $e^1 = e = 2,718....$
- quand **x** ⇨ **+∞** **lim** $e^x = +\infty$
- **quand x ⇨ −∞ lim** $e^x = 0+$



Fonction exponentielle de base a (a>0) $x \Rightarrow a^x$

a^x est la fonction réciproque de $\log_a x$

- $x=\log_a y$ équivaut à $y=a^x$.
- $a^x = (e^x)^{\ln a} = e^{x \ln a}$ (**log**$_a$ en fonction de **ln**).
- a^x a les mêmes propriétés que e^x
- $X^a = e^{a\ln(x)}$

Dérivée $(a^x)' = (\ln a)e^{x\ln a} = (\ln a)a^x$

.Equations contenant logarithmes et exponentielles

Type **ln x = 3** fonction réciproque → $x = e^3$ (le nombre cherché)

Type $e^x = 10$. fonction réciproque → **x = ln 10**

Il existe des variantes de type **ln (5x + 6) = 3** → $5x + 6 = e^3$ → **x = ...**

● **ln (5x / 6) = 7** → $5x / 6 = e^7$ → **x = ..** ● $e^{5x+3} = 7$ → **5x + 3 = ln 7 → x = ...**

Croissance comparée des fonctions

En cas d'indétermination rangées par ordre d'influence décroissante **1)** a^x **2)** x^α **3)** **ln (x)**

Pour α > 0 et a >1 (e entre dans ce cas)

en +∞ les 3 fonctions tendent vers +∞

Les quotients $\frac{\ln x}{x^\alpha}, \frac{\ln x}{a^x}, \frac{x^\alpha}{a^x}$ **tendent vers 0 quand x→+∞**

en 0⁺ $a^x = 1$ est hors circuit . $x^\alpha \to 0$ et **ln x → - ∞** .

x^α. ln x tend vers 0 quand x→ 0+

en -∞ , **ln x** n'est pas définie . $a^x \to 0$ et (avec par exemple α entier ≥ 1) $|x|^\alpha \to +\infty$.

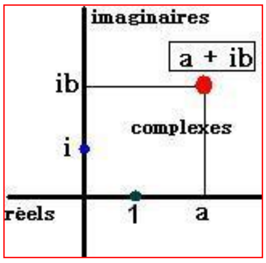
Donc $x^\alpha.a^x$ **tend vers 0 quand x ⇨→ -∞** .

GENERALISATIONS

Des nombres réels aux nombres complexes

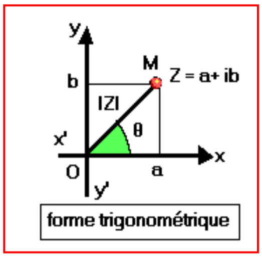
Du plan à l'espace tridimensionnel

Nombres complexes



Un nombre complexe est un nombre Z de la forme **a + ib** où **a** et **b** sont des réels et **i** = $\sqrt{-1}$.
(Par ex : 5+2i , 1 – 4i ....). On note que $i^2 = -1$. a +ib est appelé **forme algébrique** de z.
Si **z =a + ib** alors la **partie réelle** de z est **a** (Re(z) = a)
et la **partie imaginaire** de z est i**b** (Im(z)=ib).

● Si on définit 1 et i comme des vecteurs linéairement indépendants de module 1 alors l'ensemble **C** des nombres complexes a une structure d'espace vectoriel. Dans un repère orthonormé O(1, i), au nombre complexe z = a+ib correspond un point P de coordonnées (a,b). On dit que **P a pour affixe z.** Tout **point** du plan a pour affixe un nombre complexe et réciproquement. On convient aussi que si un **vecteur** du plan a pour coordonnées a et b , il a pour affixe le nombre complexe z + ib.



● L'axe associé au repère O(1, i) qui supporte le 1 supporte tous les nombres réels (a+ib avec b = 0). L'axe qui supporte le i supporte tous les nombres imaginaires purs de la forme ib (a + ib avec a = 0). Tous les points du plan qui ne se trouvent pas sur les axes sont des complexes ni réels ni imaginaires purs.

● Soit le point M d'affixe **Z = a+ ib**. L'angle orienté θ que fait OM avec l'axe Ox des réels est appelé **argument de Z** (θ = arg (Z)). La longueur R de OM est appelée **module de Z** et notée |Z| . Le nombre complexe Z s'écrit alors sous sa **forme trigonométrique** **Z = R(cos θ + i sin θ)**

On peut aussi écrire le nombre sous sa **forme exponentielle** $Z = Re^{i\theta}$. On peut résumer ces 2 formes par **Z = (R, θ)**
On verra que les 3 formes sont compatibles avec toutes les lois sur les nombres complexes.

Transcription : si Z = R(cos θ + i sin θ) = a + ib. alors **a =R cos θ** , **b= R sin θ** et **R =** $\sqrt{a^2+b^2}$

Addition : (a + ib) + (a'+ib') = (a+a') + i(b + b')

multiplication : (a + ib)(a'+ib') = (aa' – bb')+i (ab'+a'b) on applique la distributivité.

$$[R(\cos\theta + i\sin\theta)]\,[R'(\cos\theta' + i\sin\theta')] = RR'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$$

$$[R\,e^{i\theta}]\,[R'\,e^{i\theta'}] = RR'\,e^{i(\theta+\theta')} \quad \text{ou encore} \quad (R,\theta)\,.\,(R',\theta') = (RR',\,\theta+\theta')$$

Module du produit = produit des modules et Argument du produit = somme des arguments

Conjugué : Le conjugué de Z = a + ib est $\bar{Z}$ **= a – ib**. Images de Z et $\bar{Z}$ symétriques par rapport à l'axe Ox.
Si Z=R(cos θ + isin θ) = $Re^{i\theta}$ alors $\bar{Z} = Re^{-i\theta}$ = R(cos – θ + isin – θ) = R(cos θ – isin θ)
On a ● partie réelle Re(Z)=(Z+$\bar{Z}$)/2 ● partie imaginaire Im(Z) = (Z–$\bar{Z}$)/2i. ● module Z. $\bar{Z}$ = a^2+b^2 = $|Z|^2$ ou $|\bar{Z}|^2$
Conjugué d'une somme (différence, produit, quotient) = somme (différence, produit, quotient) des conjugués.

Inverse : $\frac{1}{a+ib} = \frac{(a-ib)}{(a+ib)\,(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{Z}}{R^2}$ ou encore si **Z=(R,θ)** , $\frac{1}{Z} = (\frac{1}{R}, -\theta)$

Quotient : $\frac{a+ib}{a'+ib'} = \frac{(a+ib)\,(a'-ib')}{(a'+ib')\,(a'-ib')} = \frac{(a+ib)\,(a'-ib')}{a'^2+b'^2} = \frac{Z.\bar{Z}'}{Z'.\bar{Z}'}$ ou encore $\frac{(R,\theta)}{(R',\theta')} = (\frac{R}{R'}, \theta - \theta')$

MOIVRE : $(R,\theta)^n = (R^n, n\theta)$ ou encore $[R(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = R^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ très utile en trigonométrie

EULER : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ donc $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ utile en trigo

Racines nièmes Soit deux entiers k et n tels que k ≤ n . Si $Z_k = \left(1, \frac{k}{n}2\pi\right)$ on a $(Z_K)^n = (1, k.2\pi) = 1$

Donc les nombres Z_K quand k varie de 0 à n–1 sont les racines nièmes de 1. (adapter aux racines nièmes de (R,θ))

Equations du second degré : Soit l'équation $aX^2+bX+c = 0$. Elle n'a pas de racine dans R si $\Delta = b^2-4ac$ est négatif.
Mais si Δ est négatif, il suffit d'écrire Δ =(–1) D = i^2.D et les 2 nombres $\frac{-b\pm i\sqrt{D}}{2a}$ sont racines de l'équation dans **C**.

Des complexes aux vecteurs : Soit 3 points A,B,C d'affixes a,b,c. Au vecteur AB correspond le complexe b – a.
L'argument de b – a est l'angle (vecteur unité sur Ox , vecteur AB) , le module de b – a est la norme du vecteur AB, ...
●AB et BC colinéaires si **b–a / c – b** est un réel,● AB ⊥ BC si **b–a / c – b** = ± i, ●ABC isocèle si **|b–a / c – b|** = 1 etc ...

Transformations : multiplication de Z par (1,θ) équivalente pour le point d'affixe Z à une rotation (O, θ) .
En particulier multiplication par i = (1, π/2) = rotation d'angle π/2. Multiplication par –1 = symétrie par rapport à O.
Multiplication par un réel K = homotétie de centre O de rapport K.
Multiplication de Z par (R, θ) équivalente au produit d'une homotétie (O,R) et d'une rotation (O, θ).
Addition Z + (a + ib) équivalente pour le point d'affixe Z à une translation de vecteur (a, b).

Pour maitriser la géométrie dans l'espace

➲ **il est indispensable d'avoir quelques repères dans la vie de tous les jours** pour bien visualiser les plans et les droites dans l'espace.
Par exemple :
Un livre ouvert pour visualiser tous les plans passant par une droite . Le dos du livre est la droite, ses pages sont les plans qui s'articulent sur la droite.
On peut aussi prendre la charnière d'une porte comme droite et la porte comme plan (dans toutes les positions possibles).
L'intersection de 2 plans : la ligne où deux pages du livre se rejoignent.
Une droite parallèle à un plan : Une règle posée n'importe comment sur une table par rapport au sol. Une corde à linge par rapport au sol . Le plan s'articulant sur cette droite peut être le drap de lit tendu sur la corde à linge, qui n'est pas forcément vertical (on peut l'incliner comme on veut) .
Un plan perpendiculaire a un plan : 2 faces adjacentes d'un cube, les murs d'une maison par rapport au sol.
Deux droites orthogonales : la charnière d'une porte et une ligne quelconque tracée par les pavés sur le sol. Le pied d'une table et une règle posée n'importe où sur la table. Etc …

➲ **Le dessin est important**. Il est préférable d'avoir quelques notions de perspective et de représenter, par exemple les plans comme des parallélogrammes. De voir le trajet des droites dont certaines parties sont visibles et pas d'autres (on peut utiliser des lignes pleines pour les lignes visibles et des pointillés pour les autres. Le dessin nous aide souvent à bien maîtriser la situation du problème.

➲ **Il est indispensable de connaître les définitions et les quelques théorèmes ou résultats essentiels du cours** comme ceux qui sont exposés plus loin. Et il est préférable de se référer aux exemples concrets qu'on vient d'évoquer pour voir en quoi ces théorèmes et ces lois parlent à notre sensibilité et à notre perception de l'espace qui nous entoure. Mais il faut se garder de les considérer comme des évidences. Chacune de ces lois a une démonstration qu'il vaut mieux connaître, même si, au moment de faire des exercices on les considérera comme acquises. Les procédés qu'on utilise pour démontrer ces lois relativement simples sont ceux qu'on utilisera pour résoudre des problèmes plus compliqués.

➲ Enfin, il y a quelques recettes à connaître :

⊡ **Il faut penser surtout à bien recenser tous les objets d'une figure qui appartiennent à un plan** .
En général, un plan est défini par au moins 2 droites (si on procède à partir de 3 points, on en a 3, (idem si on prend le plan d'un triangle), on a 4 droites si on prend un quadrilatère quelconque, etc…).
En général, à partir des droites qui définissent le plan, on en trace d'autres : par exemple, on prend un point sur chaque droite et on en trace une 3^{e} passant par ces points, on trace la diagonale d'un carré, la médiane d'un triangle…
Et bien il faut avoir présent à l'esprit que toutes les droites (et leurs points) tracés à partir de 2 points du plan appartiennent à ce plan par définition. C'est très important. Au besoin, on tracera avec une couleur particulière toutes les droites et tous les points du plan.

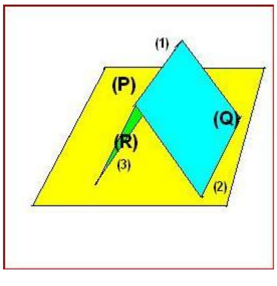
⊡ Une fois qu'on a recensé les objets d'un plan, pour effectuer une démonstration, on peut refaire la figure dans un plan et utiliser les arguments de la géométrie plane.

⊡ Quand 2 plans se coupent, il faut se souvenir qu'il suffit d'avoir 2 points de leur intersection pour visualiser la droite qui représente cette intersection et se souvenir que réciproquement tous les points qui appartiennent aux 2 plans sont alignés sur cette droite.

⊡ Il ne faut pas oublier que 2 parallèles sont forcément <u>coplanaires</u> (et ce plan est <u>le seul</u> qui les contienne toutes les deux et qui contienne l'une d'elle et un point de l'autre).
<u>Pour démonter que des droites ou des plans sont parallèles ou sécants, on utilisera souvent un raisonnement par l'absurde</u>. Du type : elles sont coplanaires, supposons qu'elles se coupent (ou qu'elles ne se coupent pas) et démontrons que cette hypothèse contredit l'énoncé (ou un résultat précédemment démontré) . Attention, en ce qui concerne les droites, il faut qu'elles soient à priori coplanaires, sinon, démontrer qu'elles ne se coupent pas, n'est pas démontrer leur parallélisme.
Mais il existe d'autre procédés exposés dans le cours comme « 2 droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles ». On cherchera si la 3^{e} droite, parallèle aux deux autres, existe.

⊡ <u>Objets confondus</u> : Il arrivera quelquefois, qu'on ait besoin, pour démontrer le parallélisme de 2 droites, de tracer une 3^{e} droite, sécante de l'une d'elles et dont le parallélisme à l'autre ne fait aucun doute, puis qu'on démontre que les 2 droites sécantes sont forcément confondues. On aura aussi besoin quelquefois de démontrer que 2 plans sont confondus (par exemple pour démontrer que des objets sont coplanaires) . Pour cela , il faut et il suffit que ces 2 plans aient 3 points en commun, à fortiori (un point et une droite ou 2 droites).

Exemple de démonstration par l'absurde.



Soit un plan P et (1) une droite parallèle à P et extérieure à P .
On se propose de démontrer :
A) que tout plan Q contenant (1) et coupant P le coupe selon une droite parallèle à (1).
B) Que 2 plans Q et R contenant (1) et coupant P le coupent selon 2 droites parallèles entre elles .

➲ Le plan Q coupe le plan P selon une droite (2) .
(1) et (2) sont dans le plan Q.
(2) est aussi dans le plan P.

➲ (1) et (2) étant coplanaires, ces droites sont soit parallèles soit sécantes.

➲ **Si elles sont sécantes**, elles ont un point d'intersection A qui appartient à la fois à (1) et à (P).
Dans ce cas, (1) n'est pas parallèle à (P) ce qui est contraire à l'énoncé.

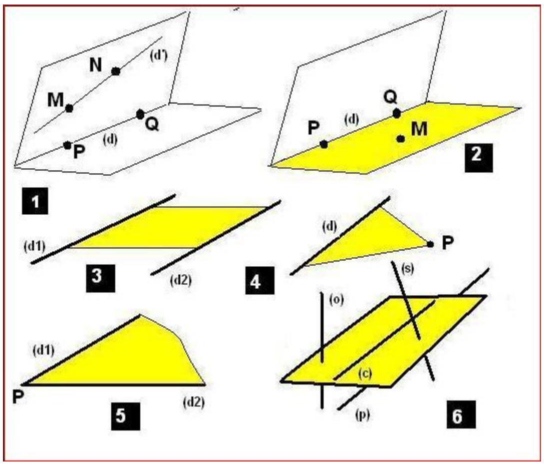
➲ On en déduit que (1) et (2) sont forcément parallèles. Il en va de même de (1) et (3). Et (2) et (3) étant // à (1) elles sont // entre elles.

Plans et droites

Pour visualiser tous les plans contenant une droite (ou 2 points), il suffit de considérer cette droite (ces 2 points) comme la charnière d'une porte qui, en s'ouvrant décrit l'ensemble de plans recherché.

1 Par 2 points P, Q on peut faire passer une infinité du plan, tous contiennent la droite (PQ).

Génération d'un plan: Si M et N sont 2 points du plan, la droite (MN) est toute entière contenue dans le plan.



Définitions de plans: **Il existe un plan et un seul contenant…**

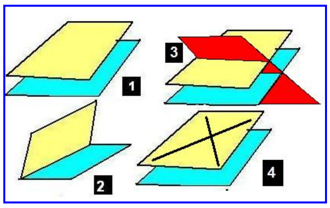
2 3 points non alignés
3 2 droites parallèles
4 une droite et un point n'appartenant pas à cette droite.
5 deux droites sécantes

On définit les droites s'appuyant sur ces objets, elles appartiennent au plan et toute droite s'appuyant sur 2 points quelconques de ces droites appartient encore au plan. On génère ainsi le plan tout entier.

Droites

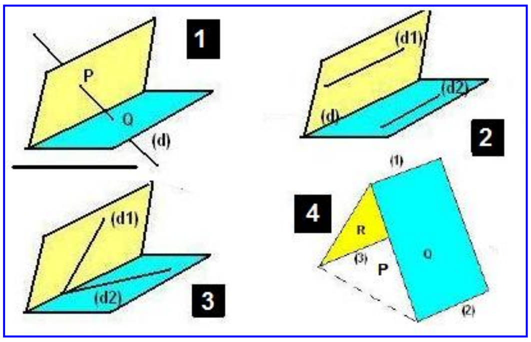
2 droites peuvent être coplanaires (situées dans un même plan). Si elles sont coplanaires elles peuvent être sécantes, parallèles ou confondues.
Si elles ne sont pas coplanaires, elles ne se coupent pas (**6** (o) et (s))
Il n'existe qu'une droite // à (d) et passant par un point extérieur à (d).
2 droites // à une même 3^{e} sont // entre elles.

Plans



2 plans sont soit parallèles **1**, soit sécants **2**, soit confondus.
2 2 plans non confondus ayant un point commun sont sécants et s'ils sont sécants ils se coupent selon une droite
3 Si 2 plans sont // tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont //.
4 Si (P) contient 2 droites sécantes // à (P') alors P est // à P'.
2 plans // à un même 3^{e} sont // entre eux.

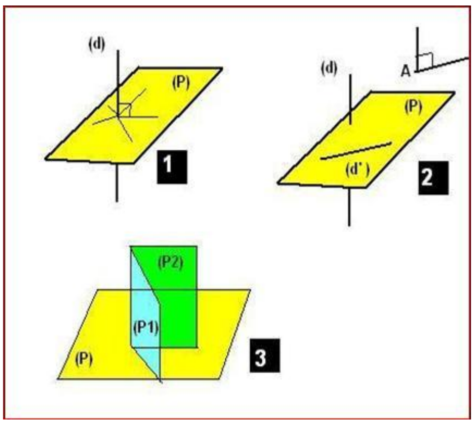
Droites et plans



1 Une droite qui ne coupe pas un plan est // à ce plan.
Si une droite (d) coupe 2 plans sans être contenue dans aucun d'entre eux, alors elle coupe chaque plan en un point unique.
2 Si (d1) est // au plan bleu (P), alors un plan jaune contenant (d1) coupe (P) selon une droite (d) // à (d1)
3 Si 2 droites (d1) et (d2) appartenant à des plans différents et sécants se coupent, elles se coupent forcément sur la droite d'intersection des plans
4 Si 2 droites // (2) et (3) appartiennent chacune à des plans différents sécants, ces 2 droites sont // à la droite d'intersection des 2 plans (1) (Théorème du toit).

Orthogonalité

On note ⊥ la propriété "perpendiculaire" ou "orthogonal".
2 objets "orthogonaux" (droites ou plans) sont dits "perpendiculaires" s'ils ont au moins un point commun.
2 objets orthogonaux ne se coupent pas forcément (droites d' et d du dessin **2** ci-dessous)



Droites orthogonales **1** et **2**. S'il existe un plan ⊥ à (d) contenant (d'), (d') et (d) sont orthogonales. Par un point A on mène une // à (d) et une // à (d'). Si ces 2 droites sont ⊥ (d) et (d') sont orthogonales.
Donc si (d) // (d1) si (d') // (d'1) et (d) ⊥ (d') alors (d1) ⊥ (d'1).

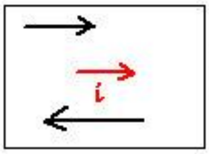
Plans et droites orthogonaux

1 Pour que (d) soit ⊥ au plan (P).Il suffit que 2 droites du plan soient ⊥ à (d)
Une droite (d) ⊥ à un plan en H est ⊥ à toutes les droites du plan passant par H.
2 Si (d) est ⊥ à (P), toutes les droites de (P) sont orthogonales à (d).
3 Pour que 2 plans soient ⊥, il suffit que l'un contienne une droite ⊥ à l'autre.
Di (d) est ⊥ à (P) tous les plans contenant (d) sont ⊥ à (P).
3 Si 2 plans sécants (P1) et (P2) sont ⊥ à un 3^{e} plan (P) alors leur intersection est ⊥ à (P). La droite intersection de (P1) et de (P) (ou celle de (P2) et de (P)) est ⊥ à la droite d'intersection de (P1) et de (P2).

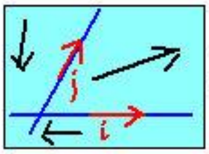
- Il existe un plan unique perpendiculaire à une droite (D) et passant par un point O.
- Par un point O on ne peut tracer qu'une perpendiculaire à une droite (D) ou à un plan (P), dont le pied est appellé **projeté orthogonal de O sur (D) ou (P)**, mais on peut tracer une infinité d'orthogonales à (D). Il suffit de tracer le plan P passant par O et orthogonal à (D) et toutes les droites de P qui passent par O sont orthogonales à (D).

Vecteurs, droites et plans en géométrie analytique

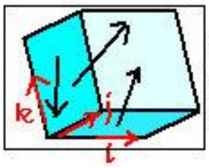
Dans ce qui suit i , j, k, V , V' sont des vecteurs, X, Y, Z sont des coordonnées de vecteurs, X_A , Y_B des coordonnées de points, x, y , z des variables, λ , α des nombres réels.



droite vectorielle



plan vectoriel

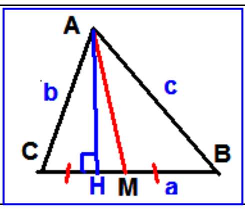


espace vectoriel de dimension 3

● **Droite vectorielle** : Ensemble de vecteurs colinéaires à l'un d'entre eux. **Dimension 1**. **Base { i }**. Tout vecteur d'une droite vectorielle peut s'écrire sous la forme **X i** avec X nombre réel quelconque.
● **Plan vectoriel** : Ensemble de vecteurs coplanaires à 2 d'entre eux. **Dimension 2**. **Base { i , j }** (i , j non colinéaires). Tout vecteur peut s'écrire sous la forme **X i + Y j** avec X et Y nombres réels appelés coordonnées dans la base {i , j}.
Dans un plan vectoriel, tout ensemble de 2 vecteurs non colinéaires en constitue une base.
● **Espace vectoriel** de **dimension 3**. **Base {i , j , k}** (chacun de ces vecteurs n'appartenant pas au plan des 2 autres). Tout vecteur peut s'écrire sous la forme **X i + Y j + Z k** (X, Y, Z sont les coordonnées dans la base choisie) . Dans un espace vectoriel de dimension 3, tout ensemble de 3 vecteurs dont l'un n'appartient pas au plan des 2 autres en constitue une base.

Dans un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à la base {i, j, k}, chaque vecteur a des coordonnées uniques (X,Y,Z). Ne pas oublier que V a pour coordonnées (X,Y, Z) s'écrit V = X i + Y j + Z k
Le sous espace des vecteurs pour lesquels on a (par exemple) X = 0 est le plan vectoriel de base {j, k}, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs que l'on peut écrire sous la forme Y j + Z k , Y et Z étant des réels quelconques.
Attention! toute relation valable dans un repère quelconque est valable dans un repère orthonormé mais l'inverse n'est pas vrai.
Notamment: calculs de distance ou de norme, évaluation du produit scalaire ne sont valables que dans un repère orthonormé.

Repère quelconque	**(O , i , j)**	**(O , i , j , k)**
Coordonnées d'un point M	X_M , Y_M tels que $\overrightarrow{OM} = X_M\, i + Y_M\, j$	X_M, Y_M, Z_M tels que $\overrightarrow{OM} = X_M\, i + Y_M\, j + Z_M\, k$
Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$	$X_B - X_A$, $Y_B - Y_A$	$X_B - X_A$, $Y_B - Y_A$, $Z_B - Z_A$
Somme V + V'	X + X ' , Y + Y'	X + X ' , Y + Y' , Z + Z'
λ fois vecteur V	λ X, λ Y	λ X , λY, λ Z
Milieu de AB	$\frac{X_A + X_B}{2}$, $\frac{Y_A + Y_B}{2}$	$\frac{X_A + X_B}{2}$, $\frac{Y_A + Y_B}{2}$, $\frac{Z_A + Z_B}{2}$
Test V et V' colinéaires	$\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'}$ ou XY' – X'Y = 0	$\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'}$
équation droite(AM) // V	Ensemble des points (x, y) tels que **$(X_A - x)Y_V - (Y_A - y)X_V = 0$** Une droite d'équation ax+by+c=0 a pour vecteur directeur (b, -a)	Ensemble des points (x, y , z) tels que **$x = X_A + \lambda X_V$, $y = Y_A + \lambda Y_V$, $z = Z_A + \lambda Z_V$**
Repère orthonormé	**(O , i , j)**	**(O , i , j , k)**
Norme de V ou distance AB	$\sqrt{X^2 + Y^2}$	$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$
produit scalaire V●V'	X X' + Y Y'	X X' + Y Y' + Z Z '
test V ⊥ V'	X X' + Y Y' = 0	X X' + Y Y' + Z Z ' = 0
équation droite ou d'un plan passant par un point A et ⊥ V	**$(X_A - x)X_V + (Y_A - y)Y_V = 0$** droite passant par A ⊥ V Une droite d'équation ax+by+c=0 a pour vecteur normal (a,b)	**$(X_A - x)X_V + (Y_A - y)Y_V + (Z_A - z)Z_V = 0$** Plan passant par A ⊥ V Un plan d'équation ax+by+cz+d = 0 a pour vecteur normal (a,b,c)
équation paramétriques	**droite (A, $\vec{u}$) Paramètre k** **formule $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k\vec{u}$** décomposée par coordonnée de M	**Plan (A,$\vec{u}$, $\vec{v}$) Paramètres k et k'** **formule $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k\vec{u} + k'\vec{v}$** décomposée par coordonnée de M



● $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$ ● $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$ ● aire (ABC) = CB.CA.sin(C)

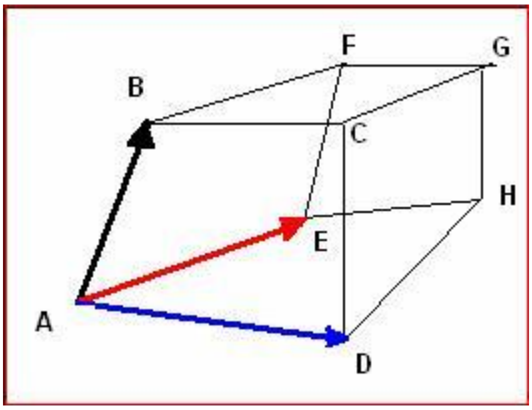
à retenir : a-b= $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ et (avec M milieu de CB) a+b= $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$ d'où on tire
[$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$] → $AB^2 - AC^2 = 2\,\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CB} = \pm\, 2HM.CB$ (selon l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CB})$)
[$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$] →$4AM^2 + CB^2 = 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
[$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$] →$4AM^2 + CB^2 = 2(AB^2 + AC^2)$ (Th de la médiane)

Pour démontrer que 3 points A, B , C sont alignés démontrer que 2 des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Pour démontrer que 4 points A,B,C,D sont coplanaires, démontrer que l'un des points est dans le plan formé par les 3 autres, à savoir il existe 2 nombres quelconques X et Y tels que par exemple $\overrightarrow{AD} = X\overrightarrow{AB} + Y\overrightarrow{AC}$ (D est dans le plan ABC) .
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont 2 vecteurs parallèles à un plan contenant le point A, ce plan, noté (A,$\vec{u}$,$\vec{v}$) est l'ensemble des pts M tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$

Les vecteurs et équations comme outils de démonstration

Dans un espace de dimension 3 , un vecteur a 3 coordonnées **(X , Y, Z)** .



3 vecteurs non coplanaires, ni colinéaires associés à un point suffisent pour constituer un repère.
Par exemple dans la figure ci contre on dit qu'on choisit le repère
(A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AD}$)

Dans un repère quelconque tous les points et tous les vecteurs ont des coordonnées (X, Y, Z) qui dépendent des consignes données pour construire la figure.
On peut utiliser toutes les opérations sur les vecteurs pour démontrer par exemple leur colinéarité (parallélisme, proportionnalité) ou leur égalité, l'alignement de points, les coordonnées du milieu d'un segment, etc ..
Dans un repère orthonormé on peut calculer leur longueur, leur produit scalaire qui permet de démontrer par exemple leur orthogonalité ou de calculer leur angle.
On dit alors qu'on utilise **la géométrie analytique**, un outil très efficace qui peut simplifier de nombreuses démonstrations.

Si a un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) correspondent les axes x'Ox, y'Oy, et z'Oz, le plan xOy a pour équation z = 0, le plan xOz a pour équation y =0 et le plan yOz a pour équation x =0.
Annuler une coordonnée d'un point (x,y,z) revient à la situer dans l'un de ces plans. P(1,1,0) se situe dans le plan (x O y)
Annuler une coordonnée d'un vecteur (X,Y, Z) revient à dire qu'il est parallèle à l'un de ces plans. $\vec{u}$ (0,3,2) parallèle au plan (yOz)
Annuler 2 coordonnées d'une vecteur (X,Y, Z) revient à dire qu'il est parallèle à un axe. $\vec{u}$ (0,3,0) parallèle à $\vec{\jmath}$

Soit un point P(A,B,C) et 2 vecteurs $\vec{u}$(a,b,c) et $\vec{v}$(a',b',c'). O est l'origine du repère. On connait les équations suivantes

Plan passant par P ⊥ à $\vec{u}$ (R orthonormé)	**Plan** (P,$\vec{u}$,$\vec{v}$)	**Droite** passant par P et // à $\vec{u}$
ax+by+cz=k avec k=$\overrightarrow{OP}.\vec{u}$ =Aa+Bb+Cc (a,b,c) sont le coordonnées du vecteur normal.	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + k\vec{u} + k'\vec{v}$ (k,k' paramètres) **x=A+ak+a'k', y=B+bk+b'k', z = C+ck+c'k'**	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + k\vec{u}$ (k paramètre) **x = A+ak , y = B+bk, z= C+ck**

Pour avoir l'équation d'un plan contenant 3 points ou 1 point et une droite donnée ou deux droites (sécantes ou parallèles).
On peut déterminer 3 points arbitraires du plan A,B,C (au besoin en donnant une valeur arbitraire à k dans l'équation des droites) et on peut trouver les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, ce qui nous donne l'équation paramétrique du plan (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$).
Si on est dans un espace orthonormé on peut chercher un vecteur (x,y,z) orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ (1, 1, 2) et $\overrightarrow{AC}$ (-1,3,1) en annulant les 2 produits scalaires x+y+2z = 0 et –x +3y +z = 0 d'où on tire par exemple y= $-\frac{3}{4}$z et x = $-\frac{5}{4}$z, il suffit de donner une valeur arbitraire à z (par exemple z = -4) et on a un vecteur normal (5,3,-4). Donc l'équation cartésienne du plan est de type 5x+3y-4z=k et il suffit d'écrire que A appartient au plan (x,y,z remplacés par les coordonnées de A) pour trouver k.

Pour avoir l'équation d'un plan (il y en a une infinité) contenant une droite donnée:
On choisit 2 points arbitraires de la droite A,B et un point arbitraire C extérieur à la droite (par lequel passera le plan ayant la droite pour charnière, on peut prendre 0,0,0), puis on cherche l'équation cartésienne de ce plan en s'inspirant du problème précédent.

Pour déterminer le point d'intersection d'une droite et d'un plan.
On a l'équation du plan ax+by+cz = d , et les équations paramétriques de la droite,
Il suffit de poser que k est la valeur du paramètre pour le point d'intersection, et ce point d'intersection vérifiant l'équation du plan, on peut dire que l'équation obtenue en remplaçant x par A + kα , y par B + kβ et z par C+kγ dans l'équation du plan doit être vérifiée.
On obtient ainsi une équation a(A + kα) +b(B + kβ)+ c(C+kγ) =d dont k est la seule inconnue.
Connaissant k, on peut le reporter dans l'équation paramétrique de la droite pour trouver les coordonnées du point d'intersection.

Pour déterminer l'équation paramétrique de la droite intersection de 2 plans

ax + by + cz = k	**équation du plan (P1)**
a'x + b'y + c'z = k'	**équation du plan (P2)**

Si a/a',b/b',c/c' proportionnels mais pas k/k' → plans //
Si a/a',b/b',c/c' et k/k' proportionnels → plans confondus

Il arrive qu'on détermine une droite comme l'intersection de 2 plans sécants. La méthode la plus simple pour déterminer l'équation paramétrique de la droite est de chercher grâce aux 2 équations x en fonction de z et y en fonction de z, puis on égale z au paramètre k et on a une équation paramétrique, par exemple x =3+2k , y =1 +5k , z = k qui est l'équation d'une droite passant par (3,1,0) et de vecteur directeur (2,5,1)

Pour déterminer la projection orthogonale d'un point Q(A,B,C) sur une droite (P, $\vec{u}$) avec $\vec{u} = (a, b, c)$ et P(p,q,r)
On peut dire dit que H(x,y,z) est le point recherché. Chercher les coordonnées de $\overrightarrow{QH}$ et $\overrightarrow{PH}$, puis remplacer x,y,z par leur valeur en fonction de k paramètre de la droite et écrire soit que $\overrightarrow{QH}.\overrightarrow{PH} = 0$ soit que $PQ^2 = QH^2 + PH^2$. (Equation en k)
Mais il est plus simple de considérer que **le plan passant par Q et de vecteur normal $\vec{u}$, coupe la droite en H** ce qui nous ramène à un problème déjà vu "déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan".

Pour déterminer la projection orthogonale d'un point Q(A,B,C) sur un plan ax+by+cz=d.
On dit que H(X,Y,Z) est le point recherché.
On écrit que $\overrightarrow{QH}$ colinéaire au vecteur normal du plan (X-A=ka , Y-B=kb, Z-C=kc) d'où X=A+ka, Y=B+kb et Z=C+kc.
Ensuite on dit que H(X,Y,Z) vérifie l'équation du plan aX+bY+cZ = d et en remplaçant X,Y,Z par leurs valeurs en fonction de k on a une équation en k. Trouver k permet de calculer X,Y,Z.

Probabilités et statistiques

au lycée

Table des matières

Ce chapitre reprend les connaissances acquises à ce stade depuis le début de votre scolarité de façon à en donner une vue d'ensemble. Il déborde (très légèrement) le programme quand la maîtrise du cours l'exige.

Ensembles, éléments et sous ensembles. Vocabulaire et notations.

Pour bien débuter en probabilités, il faut d'abord maîtriser la notion d'ensemble et tout le vocabulaire qui s'y rapporte.

Ensembles au sens trivial et éléments

Dans **{x, y , z}** les accolades désignent un ensemble contenant 3 éléments , x, y, z .
Si A = {x,y,z} est un **sous-ensemble** (**une partie**) d'un ensemble E plus vaste contenant par exemple 10 éléments, et que ces 3 éléments sont prélevés au hasard, on dit que "A est **une combinaison** de 3 éléments pris parmi 10".
Utiliser le mot "Combinaison" suggère que ces 3 éléments auraient pu être différents au gré du hasard.
En probabilités, si dans un sac contenant 10 objets différents on en tire 3 au hasard **simultanément**, on tire une combinaison de 3 objets.
Quand on tire les 3 objets **successivement**, **sans remise**, il y a 2 possibilités

● Soit on considère que l'ordre dans lequel on tire ces 3 objets n'a aucune importance (par exemple on les met dans une boîte et on considère le contenu de la boîte comme le résultat d'un tirage multiple). Dans ce cas les 3 objets constituent aussi une combinaison.

● Soit on considère que l'ordre dans lequel on tire ces 3 objets a de l'importance (ce qui revient à associer un rang à chaque objet) et dans ce cas, les 3 objets forment ce qu'on appelle **un arrangement**. "Un arrangement de 3 objets pris parmi 10".

Une combinaison sera notée **{x,y,z}**, un arrangement sera noté **(x,y,z)**. Les accolades signifient que le sous ensemble n'est pas ordonné, les parenthèses signifient qu'à chaque élément correspond un rang qui est celui qu'il occupe dans l'écriture de l'arrangement (x au 1^{er} rang, y au 2^{e} et z au 3^{e}).
Les techniques de dénombrement permettent de compter le nombre des combinaisons ou des arrangements de p éléments qu'on peut faire avec un ensemble de n éléments.

Ensembles produits et n- uplets

Soit 3 ensembles A, B, C. Si on tire au hasard un objet dans chaque ensemble, on obtient 3 objets x, y, z avec $x \in A$, $y \in B$, $y \in C$. Ces 3 objets forme ce qu'on appelle un triplet. On peut écrire (x,y,z) ce triplet en convenant que la 1ere composante (x) appartient à A, la 2^{e} (y) appartient à B, la 3^{e} (z) appartient à C.

L'ordre dans lequel on cite les composantes a de l'importance puisqu'il caractérise l'appartenance de chaque composante à un ensemble donné, d'où l'utilisation des parenthèses.

L'ensemble des triplets que l'on peut former en procédant ainsi s'appelle "**ensemble produit**" noté AXBXC.

On dit que (x,y,z) est un élément de l'ensemble produit AXBXC.

Un élément peut donc être formé de plusieurs composantes.

Si toutes les composantes appartiennent à un même ensemble, par exemple $\mathbb{R}$, on dira que $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
(3,3,3) ou (3,2,3) sont donc des triplets possibles tandis qu'un arrangement comporte forcément 3 composantes différentes, toutes issues d'un même ensemble.

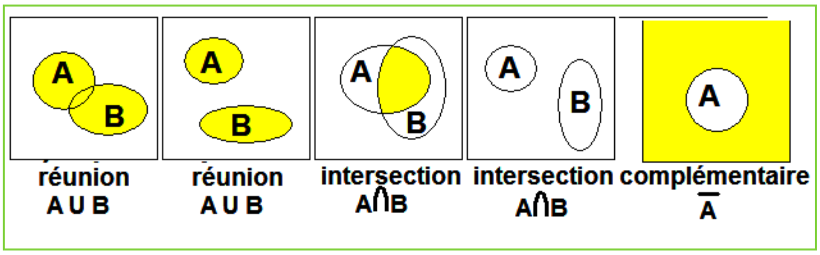
Les éléments de A X B sont appelés les **couples** (x,y) tandis que l'ensemble {x,y} est appelé **paire** ou **doubleton**.
Les éléments d'un ensemble produit de n ensembles sont appelés des **n-uplets**.
Une technique de dénombrement permet de calculer le nombre d'éléments d'un ensemble produit lorsqu'on connait le nombre d'éléments de chacun des ensembles qui le composent.

Permutations:

(a,b, c) et (b,a,c) contituent deux **permutations** différente d'un arrangement (et 2 arrangements différents).
Avec une combinaison {a,b;c} ou peut faire plusieurs arrangements
(a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a). Ici 6 arrangements avec une combinaison de 3 éléments.
Une technique de dénombrement permet de calculer le nombre de permutations qu'on peut faire avec une combinaison de p éléments.

Opérations sur les ensembles

La définition des principales opérations sur les ensembles est supposée connue:



Réunion : ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B, soit aux deux.
Intersection : ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B (cet ensemble peut être vide).
Complémentaire de A dans Ω, ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.

Dénombrements

sur la calculatrice $\boxed{X\,!}$ factorielle $\boxed{nCr}$ combinaisons $\boxed{nPr}$ arrangements

En probabilité on a souvent besoin de compter les éléments d'un ensemble et il n'est pas rare que l'on ait souvent à faire appel aux techniques de dénombrement que nous allons étudier, éventuellement avec l'aide de la calculette ou d'un tableur.

Nombre de permutations d'un ensemble de n éléments.

Soit E= {1;2;3}. Tout triplet (x,y,z) de E^3 tel que $x \in E$; $y \in E$; $z \in E$ et $x \neq y \neq z$ constitue une permutation de E.
Par exemple (2,1,3) ou (3,2,1) sont des permutations de {1;2;3}. Combien de permutations peut – on faire d'un ensemble de 3 éléments? Et plus généralement d'un ensemble de n éléments?
On retrouve **le nombre de permutations** de E grâce à l'arbre suivant où l'on a mis successivement chacun des 3 éléments en 1ere position, les 2 autres en seconde position, et, bien sûr, l'élément restant en 3^{e} position:

		3	(1, 2, 3)
	2		
1			
	3		
		2	(1, 3, 2)
		3	(2, 1, 3)
	1		
2			
	3		
		1	(2, 3, 1)
		2	(3, 1, 2)
	1		
3			
	2		
		1	(3, 2, 1)

Lorsqu'on cherche le nombre de permutations d'un ensemble de n éléments on raisonne de la façon suivante

- En 1ere position on a **n** possibilités
- pour chacune d'elles, une fois le 1er élément situé, en 2^{e} position on a **n – 1** possibilités **n(n-1)** en tout
- pour chaque classement des 2 premiers, en 3^{e} position on a **n -2** possibilités. **n(n-1)(n-2)** en tout.

…. et ainsi de suite jusqu'à…

- pour chaque classement des n – 1 premiers, en n^{eme} position on a **1** seule possibilité.

Donc **le nombre de permutations possibles, le nombre de classements possibles pour un ensemble de n éléments est le nombre n! = n(n-1)(n-2)….(2)1.**
Pour 3 éléments cela donne 3! = 3x2x1 = 6. **Le nombre n! est appelé "factorielle n".**

Nombre d'éléments d'un ensemble produit.

Soit A un ensemble de 3 éléments {x,y,z} et B un ensemble à 2 éléments {a,b}. En empruntant un élément à chaque ensemble je peux faire ce qu'on appelle un couple tel que (x,a) ou (z,b) où le premier élément appartient A et le second à B. C'est l'ensemble de ces couples qu'on appelle l'ensemble produit A X B. On peut sans difficulté imaginer que l'ensemble produit A X B XC est l'ensemble des triplets (x,y,z) avec $x \in$ A, $y \in$B, $z \in$ C.
Dans un triplet (comme dans un vecteur) x,y,z sont les composantes d'un élément unique, classées selon leur "provenance".
Comment compter le nombre d'éléments d'un ensemble produit fondé sur des ensembles finis ? ($\mathbb{R}$ est infini)
On peut construire A X B grâce au tableau à double entrée de 3 x 2 cases suivant:

	x	y	z
a	(x,a)	(y,a)	(z,a)
b	(x,b)	(y,b)	(z,b)

On comprend que si A compte **n** éléments et B compte **p** éléments, A X B compte **np** éléments.
Si on ajoute un ensemble C comptant **q** éléments, pour constituer A X B X C il suffira d'associer tout élément de A X B à chaque élément de C pour constituer tous les triplets.
On en dénombrera donc **npq**.
On peut généraliser ce résultat à un ensemble produit de n ensembles: **Le nombre d'éléments d'un ensemble produit fini et égal au produit des nombres d'éléments de chacun des ensembles finis qui le constituent.**

Nombre des arrangements de p éléments qu'on peut réaliser avec un ensemble de n éléments.

Pour fixer les idées, 5 chevaux numérotés de 1 à 5 disputent une course. Les 3 premiers forment le tiercé gagnant (le podium) mais l'ordre ayant de l'importance (1,2,3) n'est pas le même tiercé que (1,3,2) par exemple et un tiercé est donc un arrangement de 3 chevaux parmi 5. Le mot arrangement suggérant que l'ordre a de l'importance.
Dans un arrangement x,y,z forment un groupement de 3 éléments issus d'un même ensemble E qui, ordonnés différemment donneraient un autre arrangement. Donc l'arrangement est équivalent à un triplet tel que $(x,y,z) \in E^3$ et $x \neq y \neq z$.
Avec 5 chevaux, combien peut-on faire d'arrangements de 3 chevaux?

		3	123
	2	4	124
		5	125
		2	132
	3	4	134
		5	135
1		2	142
	4	3	143
		5	145
		2	152
	5	3	153
		4	154

Faisons un arbre recensant toutes les possibilités quand le 1 occupe la première place puis généralisons:
Pour occuper la première place nous avons **5** possibilités.
Une fois la première place occupée il reste **4** concurrents pour occuper la deuxième. (5x4 pour les 2 rangs).
Et enfin, quand les 2 premiers sont en place, il reste **3** concurrents pour occuper la troisième place.
Avec 5 chevaux, on peut donc réaliser **5**x**4**x**3** = 60 arrangements de 3 chevaux.
Plus généralement avec un ensemble de n éléments, on pourra réaliser **n(n – 1) (n-2) …..(n-p+1)** arrangements de p éléments. Ce nombre étant formé des **p premiers facteurs de n !**
On peut également l'écrire $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$, par exemple $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{5x4x3x2x1}{2x1} = 5x4x3 = 60.$

Nombre de combinaisons de n éléments pris p à p.

Une combinaison de p éléments est un sous ensemble de p éléments pris dans un ensemble d'effectif n , sans considération d'ordre ou de rang. Donc cette fois {1 ; 2 ; 3} est la même combinaison que {1; 3 ; 2} par exemple.
Avec une combinaison de 3 éléments, on peut faire 3! permutations.
Donc avec une combinaison de 3 éléments on fait 3! arrangements. (3! = 6).
Avec une combinaison de p éléments on peut faire p! arrangements.
Donc : le nombre de combinaisons de n éléments pris p à p (noté $[{n \atop p}]$) est p! fois plus petit que nombre d'arrangements de p éléments pris parmi n.

$$[{n \atop p}] = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

par exemple nombre de combinaisons de 49 nombres pris 6 à 6 = $\frac{49!}{(49-6)!6!} = \frac{49x48x47x46x45x44}{6x5x4x3x2x1} = 13.983.816$

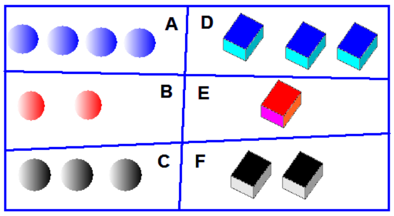
Les contextes dans lesquels on utilise les probabilités.

Définitions

Voici comment le site du CNED (académie en ligne) définit le vocabulaire que nous utilisons en probabilité.
Une **expérience aléatoire** est une expérience pour laquelle plusieurs résultats sont possibles, sans que l'on puisse prévoir celui qui se produira. Les résultats possibles sont aussi appelés **les issues** ou **les éventualités**. Dans l'étude d'une expérience aléatoire, les notions ci-dessous sont fondamentales.
Univers : c'est l'ensemble de toutes les issues de l'expérience aléatoire, il est souvent noté Ω.
Evénement : c'est un sous-ensemble de l'univers.
Evénement élémentaire : un événement constitué d'une seule éventualité.
Evénement certain : c'est l'univers lui-même Ω.
Evénement impossible : c'est l'ensemble vide ∅

Le contexte

Un ensemble T contient plusieurs **éléments** distingués par des **caractères** (couleur, sexe, numéro, poids, forme, …).
Certains caractères comme la couleur sont qualitatifs, d'autres, comme le poids, sont quantitatifs (exprimés par un nombre).
Chaque caractère peut prendre plusieurs "valeurs" que l'on appelle "**modalités**". Par exemple : "bleu", "blanc", "rouge" sont des modalités du caractère couleur.



Voici un ensemble dont les éléments, définis comme équiprobales devant un tirage, sont dotés de **2 caractères** la forme et la couleur.
La forme est déclinée en 2 **modalités** : boule ou cube.
La couleur est déclinée en 3 **modalités** : bleue, rouge ou noire.
Cet ensemble peut être découpé en fonction du caractère qui nous intéresse en 2 sous ensembles "boules" et "cubes" ou en 3 sous ensembles "bleus", "rouges", "noirs".

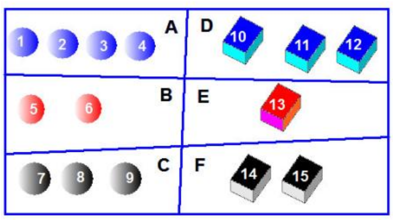
Les éléments ayant à la fois la même forme et la même couleur sont regroupés en 6 sous ensembles A, B, C, D, E, F dont la réunion forme l'ensemble T.
On tire au hasard un élément de cet ensemble, et, sachant que tous les éléments ont la même probabilité d'être tirés, on peut nous demander de calculer, par exemple,
la "probabilité de tirer une forme rouge" alors l'évènement est l'ensemble des formes rouges
ou la "probabilité de tirer une boule" alors l'évènement est l'ensemble des boules.

Evènements composites. On peut définir un évènement en associant plusieurs modalités par des opérateurs logiques (Ou, Et , Non) ce qui donne des évènements composites auxquels correspondent des sous - ensembles composites.

Evènement composite	sous - ensemble correspondant
Boule **ET** noire (autrement dit "boule noire")	C intersection de "boule" et de "noire"
Cube **ET** rouge (autrement dit "cube rouge")	E intersection de "cube" et de "rouge"
cube **ET** boule	∅ ensemble vide aucun élément n'est à la fois "cube" et "boule"
"boule" **OU** ""noire"	réunion de "boule" avec "noire" A **U** B **U** C **U** F
"boule" **OU** "cube"	réunion de "boule" avec "cube" soit Ω l'univers tout entier
NON rouge (= "bleue" OU "noire")	Complémentaire de "rouge" dans Ω = A **U** D **U** C **U** F

Donc quand on associe deux évènements par un **ET** on fait leur **intersection**.
Quand on les associe par un **OU** on fait leur **réunion**.
À la **négation** d'un évènement correspond son **complémentaire** dans l'univers.

La nature des issues est définie par le protocole de l'expérience aléatoire



Selon que l'expérience aléatoire est composée d'un tirage individuel, d'un tirage multiple ou de plusieurs tirages successifs, les issues changeront de forme.
Par exemple, une issue peut revêtir les formes suivantes:
{11} si on tire un élément unique et qu'on s'intéresse à son "identité"
{5 ; 11; 15} si on tire simultanément 3 objets. Dans ce cas {5;11;15} = {11;15;5}.
(5 , 11, 15) un arrangement ou un triplet si on tire successivement 3 objets, sans remise ou 3 objets avec remise (ou dans 3 ensembles différents) et que le rang des tirages importe.

Ω étant l'ensemble des issues possibles, ce peut être l'ensemble des identités des éléments de T (15 issues), l'ensemble des combinaisons de 3 objets qu'on peut faire avec les 15 éléments de T, l'ensemble des arrangements des objets de T 3 par 3, l'ensemble des éléments de l'ensemble produit T^3, etc ….
Les évènements sont des sous ensembles d'issues. Par exemple pour un tirage unique: les sous ensembles "couleur" {bleu, rouge, noir}, les sous ensembles "forme" {boule, cube}.
Tout dépend du protocole du tirage et des caractères entrant dans la composition des évènements auxquels on s'intéresse.
On peut aussi tirer simultanément 3 objets et s'interroger sur la probabilité de tirer 2 bleus et un rouge. Il faudra alors savoir compter toutes les issues possibles (Ω est formé de toutes les combinaisons de 3 objets parmi 15) et parmi elles celles qui donnent 2 bleus et un rouge (l'évènement) pour pouvoir évaluer cette probabilité. On fera alors appel à une technique de dénombrement.

L'axiomatique des probabilités

● Le concept de « probabilité » est intuitif. On l'utilise quand on dit par exemple "Tel club a une chance sur mille de remporter la coupe d'Europe" ou "il ya 9 chances sur 10 pour qu'il pleuve avant la fin de la semaine".

Mais en mathématiques, le contexte et le concept doivent obéir à des règles définies par Kolmogorov (1933):

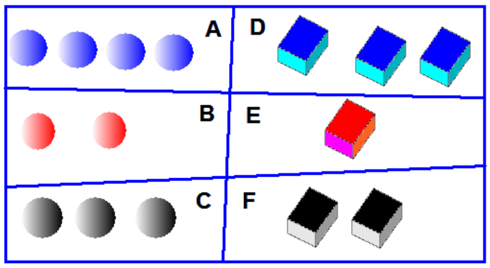
● **L'univers Ω** est l'ensemble des issues possibles de l'expérience aléatoire. On peut le scinder en sous ensembles appelés **évènements** selon les questions que l'on peut se poser sur la probabilité des modalités présentes dans **Ω**.
Il faut donc voir les évènements comme des ensembles pouvant contenir une issue, plusieurs issues, aucune issue (ensemble vide ∅) ou toutes les issues (l'univers Ω)

Pour que la probabilité dans **Ω** ait un sens il faut
● Que l'ensemble des évènements possibles forment ce qu'on appelle **une tribu**
● Que tous les évènements possibles soient **mesurables** et que cette mesure soit comprise entre 0 et 1 (inclus).
C'est cette mesure qu'on appellera probabilité de l'évènement.

Qu'est ce qu'une tribu? Une famille de parties de l'univers vérifiant les propriétés suivantes:
① Si A est une partie de l'univers (un évènement) appartenant à cette famille, ce doit aussi être le cas du complémentaire de A dans l'univers (que l'on note $\overline{A}$, autrement dit "non A" ou "contraire de A")
② Si A1, A2, …., An sont des évènements appartenant à cette famille, ce doit aussi être le cas de la réunion de ces évènements A1 U A2 U … U An
③ L'univers et l'ensemble vide doivent aussi faire partie de cette famille.

Qu'est ce qu'une mesure? Une application qui à toute partie X de la tribu fait correspondre un nombre réel M(X).
En tant que mesure particulière la probabilité qui à une partie X fait correspondre P(X) vérifie ces propriétés:
❶ à un évènement Ai elle fait correspondre un nombre P(Ai) compris entre 0 et 1. $P(A_i) \in [0 ; 1]$.
❷ si les évènements A1, A2, …, An sont 2 à 2 <u>disjoints</u> $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$
❸ $P(\emptyset)=0$ et $P(\Omega) =1$
On en déduit immédiatement que
❹$P(\overline{A})= 1- P(A)$ La probabilité de A + la probabilité du contraire (complémentaire) de A = 1.
puisque $\overline{A} \cup A = \Omega$ et que ce sont 2 parties disjointes.
❺ Si A et B sont 2 parties ayant une intersection commune (A ∩ B) on a $P(A \cup B) = P(A)+P(B)- P(A \cap B)$
puisque (A) et (B - A ∩ B) disjointes de réunion (A U B) ainsi que (B-A∩B) et (A∩B) disjointes de réunion (B).

Observons que le nombre d'éléments d'un sous-ensemble A en constitue une mesure. Si on divise cette mesure par le nombre d'éléments de Ω on obtient une autre mesure qui n'est autre que la fréquence de A dans Ω.
Or la fréquence de A (sous – ensemble de Ω) dans Ω est comprise entre 0 et 1.



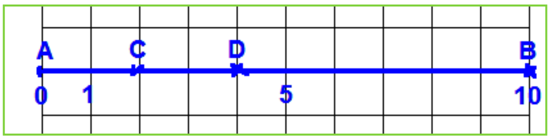
Pour reprendre l'exemple où l'on tire une forme dans Ω:
Tout sous ensemble de Ω qu'il contienne 1, 2 ou 14 éléments constitue une partie de Ω. Si on ajoute Ω et l'ensemble vide à l'ensemble de ces sous-ensembles, on obtient l'ensemble nommé "parties de Ω ", et cet ensemble est bien une tribu. Puisque la réunion de 2 parties de Ω est une partie de Ω, le complémentaire d'une partie de Ω est une partie de Ω et Ω ainsi que l'ensemble vide sont des parties de Ω.

Ensuite, il suffit de définir la fréquence dans Ω d'une partie A de Ω comme le rapport $\frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$ et **la fréquence de A dans Ω est une probabilité sur Ω** puisque la fréquence est un nombre compris entre 0 et 1, la fréquence de Ω est 1, la fréquence de l'ensemble vide est 0, si on prend 2 parties <u>disjointes</u> de Ω (A et B) la fréquence de A **U** B est égale à la somme de la fréquence de A et de la fréquence de B.
<u>Toute partie de Ω peut donc être considérée comme un évènement possible lors d'un tirage aléatoire</u> lorsque Ω remplit un sac ou une urne, mais pour que le tirage soit aléatoire, il ne faut pas, par exemple, que l'une des formes soit bien plus grosses que les autres ce qui augmente ses chances d'être tirée. Il faut que les formes soient équiprobables. De l'étude de ce cas particulier on peut déduire une loi générale:

Si tous les éléments d'un ensemble Ω qui en comporte un nombre fini (on peut les compter) sont équiprobables devant un tirage aléatoire, **tout sous ensemble de Ω constitue un évènement possible pour ce tirage**,
la fréquence de tout évènement dans Ω constitue une probabilité de l'évènement sur Ω,
et c'est communément cette probabilité qu'on nous demande de calculer.

Extension de la notion de probabilité aux ensembles infinis.

Certains ensembles infinis comme l'ensemble des nombres entiers ne sont pas mesurables, d'autres comme le segment de droite sont mesurables même s'ils contiennent une infinité de points.
Seuls les ensembles mesurables sont probabilisables.



La mesure d'un segment peut être une notion physique (AB = 10 cm) ou mathématique (par exemple ce segment est porté par un axe et la longueur du vecteur unité définit l'unité de mesure). Dans ce dernier cas on dit AB = 10 (sans unité de mesure).

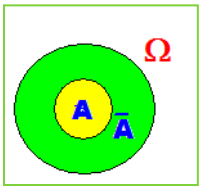
On peut imaginer une expérience aléatoire qui consiste à piquer un point au hasard sur [AB] de mesure 10 et s'interroger sur la probabilité que ce point soit situé sur [CD] de mesure 2.
Cet espace est – il probabilisable? Oui, il suffit de considérer les parties de [AB] constituées de segments inclus dans [AB], de la réunion d'un nombre quelconque de ces segments, de [AB] lui-même et de l'ensemble vide.
Ces parties constituent une tribu et comme on sait mesurer tout segment de droite ou toute réunion de segments de droite; cela fait de [AB] un ensemble probabilisable dont les évènements sont les éléments de la tribu.
Comment définir une probabilité sur [AB]?
Soit X une partie de [AB]. Que X soit un segment ou une réunion de segments, X a une mesure que nous pouvons facilement évaluer. Si l'on définit **P(X) =** $\frac{\text{mesure de X}}{\text{mesure de [AB]}}$, P(X) est une probabilité sur [AB] , c'est la probabilité de l'évènement X.

Plus généralement.

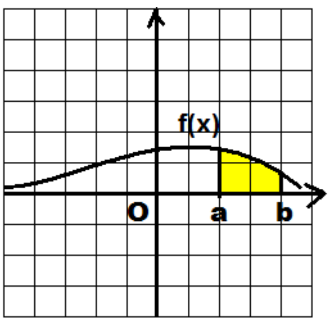
Lorsqu'on sait mesurer une ligne, une surface, un volume, ou même un intervalle de temps, on peut faire de cet espace un univers probabilisable en le scindant en une tribu de sous espaces mesurables, en général de même nature que l'univers.
Dans de tels espaces, les évènements dont on veut mesurer la probabilité doivent faire partie de la tribu.
Ou plutôt la tribu des évènements doit être constituée de sous ensembles mesurables.
<u>En général, on s'interroge sur la probabilité pour qu'un ou plusieurs points obtenus par un processus aléatoire soient contenus dans un sous espace mesurable d'un espace mesurable.</u>
Par exemple probabilité pour que un point tiré au hasard sur [AB] fasse partie du segment [CD] sera notée P([CD]). [CD] est l'évènement.
Généralisons la notion de probabilité aux espaces mesurables:

Soit Ω un espace mesurable
X une partie mesurable de cet espace.
P(x) = $\frac{\text{mesure de X}}{\text{mesure de } \Omega}$ définit la probabilité communément utilisée sur Ω .

Remarquons qu'un point constitue une partie d'un espace géométrique infini ou un instant une partie d'un temps mais le point et l'instant ont une mesure nulle et à ce titre ils ont une probabilité nulle.
Autrement dit la probabilité de tirer un point particulier dans un espace infini mesurable est nulle.



Un disque Ω de rayon r peut être découpé d'une infinité de façons, par exemple en disques concentriques (A) de rayon ≤ r et en couronnes circulaires complémentaires $\bar{A}$ dont la réunion est encore un disque de rayon ≤ r ou une couronne complémentaire.
Il suffit d'ajouter l'ensemble vide à cette famille et on obtient une tribu dont on sait calculer l'aire de chaque membre.
On fait ainsi de Ω un espace probabilisable.



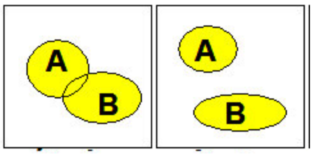
Bien qu'infini, $\mathbb{R}$ peut être considéré comme un espace probabilisable à condition…
a) de considérer que les évènements sont des intervalles ou réunions d'intervalles de $\mathbb{R}$
b) de connaître une fonction f(x) définie et positive pour tout x $\in \mathbb{R}$ telle que si on appelle $\int_a^b f(x)dx$ l'aire comprise entre l'axe des x, la courbe f(x) et les droites d'équation x = a et x = b (en jaune sur le dessin) on ait $\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{+a} f(x)dx = 1$ (l'aire totale sous la courbe est 1)
● Soit x un nombre aléatoire de $\mathbb{R}$ on pose P(x $\in$[a;b]) = P([a;b]) = $\int_a^b f(x)dx$.
P a toutes les caractéristiques d'une probabilité.
Tout se passe comme si la probabilité totale (égale à 1) était répartie différemment tout le long de l'axe des x, la densité de probabilité en x étant f(x), ce qui fait qu'un tout petit intervalle autour de x d'amplitude dx aurait une probabilité f(x)dx (petit rectangle d'aire dx par f(x))
Si f(x) est le nombre par lequel on doit multiplier la longueur d'un segment dx pour trouver sa probabilité, f(x) est une densité de probabilité. Plus f(x) est grand, plus la densité de probabilité au point x est grande.

Les bases du calcul de probabilités

On note une probabilité par un P suivi de parenthèses, ces parenthèses contenant le libellé de l'évènement P(A), P(A OU B) ou le libellé de l'ensemble correspondant à un évènement composite P (A **∪** B).

L'ensemble A **∪** B correspondant à l'évènement A ou B et l'ensemble A ∩ B correspondant à l'évènement A et B.
Ce que mesure une probabilité c'est toujours un ensemble.

Evènements compatibles et incompatibles



Si les ensembles qui correspondent aux évènements ont une intersection non nulle, cela signifie qu'il existe au moins un tirage pour lequel les évènements A et B sont simultanément réalisés. Dans ce cas on dit que les évènements sont compatibles ou "sécants".
Dans le cas contraire les évènements sont incompatibles ou "disjoints".

Par exemple dans notre exemple de tirage aléatoire d'une forme l'évènement " boule" et l'évènement "cube" sont incompatibles (il n'existe pas de forme qui soit à la fois boule et cube), par contre l'évènement "boule" et l'évènement "rouge" sont compatibles puisqu'ils sont simultanément réalisés lorsqu'on tire une boule rouge.

Propriétés immédiates:

P(Ω) = 1 (l'évènement "l'élément tiré appartient à Ω" est une certitude. Une certitude a une probabilité égale à 1)
P(∅) =0 (l'évènement est l'ensemble vide, évènement impossible)

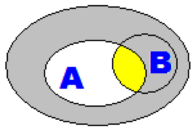
Si A et B sont incompatibles (A ∩ B = ∅) on a **P(A ou B)** = **P(A ∪ B)** =**P(A)+ P(B)**

Si A et B sont compatibles (A ∩ B ≠ ∅) on a **P(A ou B)** = **P(A ∪ B) =P(A)+ P(B) – P(A ∩ B)** = **P(A)+ P(B) – P(A et B)**

P(Ω) = **P($\overline{A}$) + P(A)** = **1** (Il est certain que toute issue réalise soit l'évènement A soit son contraire).

Probabilités conditionnelles.

On note **P_A(B)** La **probabilité de B sachant que A est réalisé**. Quand A est réalisé l'univers des possibles se réduit à A.



Sachant que l'évènement A est réalisé, la probabilité que B se réalise est égale à la proportion d'issues favorables à B que contient A. Or ces issues sont celles de A ∩ B.

Donc P_A(B) n'est pas autre chose que la fréquence (ou la densité) de A ∩ B dans A.

Si on note nb (E) le nombre d'éléments d'un ensemble E:

L'univers se réduisant à A on a **P_A(B)** = $\frac{\text{nb }(A \cap B)}{\text{nb }(A)}$ = $\frac{\text{nb}(A \cap B)}{\text{nb}(\Omega)} : \frac{\text{nb}(A)}{\text{nb}(\Omega)}$ = $\frac{\textbf{P(A et B)}}{\textbf{P(A)}}$ (mesurées dans Ω) (et aussi $P_B(A)=\frac{\text{P(A et B)}}{\text{P(B)}}$)

et on déduit que **P(A et B)** ou P(A ∩ B) = **P(A).P_A(B)** De plus on a P_A.PA(B) = P(B).P_B(A)

On voit aussi que **$P_A(\overline{B})$=1 –P_A(B)** en effet, A constitue l'univers et dans A , B et $\overline{B}$ sont complémentaires.

Derrière ces formules complexes se cache une réalité toute simple:
Supposons que P(A)=60% et P_A(B)= fréquence de A∩B dans A = 40% quelle est la fréquence de A∩B dans Ω (soit P(A et B))?
Si A représente 60% de l'univers et A∩B représente 40% de A, alors
A∩B représente 40% de 60% de l'univers soit 40%x60% = 24% de l'univers

Evènements indépendants.

A et B sont indépendants si et seulement si **P_A(B)=P(B)**. On a alors **P(A et B)** = **P(A).P(B)**
<u>P_A(B)=P(B) signifie que la fréquence de B est la même dans A que dans Ω</u>. Et donc cette fréquence est aussi identique dans A et dans $\overline{A}$. $P_{\overline{A}}(B) = P(B)$. Autrement dit la propriété A n'a aucune influence sur la propriété B.
<u>Par exemple</u> si la proportion de celles qui ont fait des études secondaires parmi les filles est la même que la proportion de ceux qui ont fait des études secondaires dans l'ensemble de la population (et donc la même que chez les garçons), cela signifie que l'évènement "avoir fait des études secondaires" est indépendant du sexe.
Si dans un groupe de 100 personnes il y a 60% de filles F et que la probabilité qu'un individu ait fait des études secondaires E est 80%. Quand on tire une personne au hasard dans ce groupe, la probabilité pour que ce soit une fille qui ait fait des études secondaires est P(F et E) = P(F).P(E) = 60% x 80% soit 48%. nb(F ∩ E) = 48% de l'effectif.

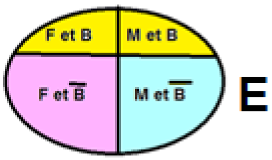
On a donc

Evènements compatibles **P(A ou B) = P(A U B)** = **P(A)+ P(B) – P(A et B)**	Evènements incompatibles (disjoints) **P(A ou B) = P(A U B)** =**P(A)+ P(B)**
Cas général **P(A et B)** ou **P(A ∩ B) =** **P(A).P_A(B)**	Evènements indépendants **P(A et B)** ou **P(A ∩ B) =** **P(A).P(B)**

Application : partition d'un ensemble selon des caractères croisés

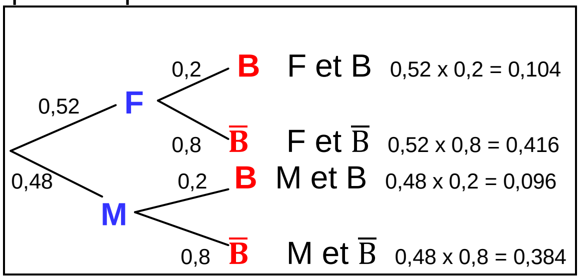
Caractères indépendants

Supposons qu'on s'intéresse au sexe et à la couleur des cheveux dans une population importante E.
Ces deux caractères sont indépendants.
Si la proportion de blonds dans la population est 20%, cette proportion doit être la même pour les individus de sexe masculin et pour les individus de sexe féminin.
Si on note F et M le sexe et la couleur de cheveux B pour blond et $\overline{B}$ pour non – blond, la population peut être scindée en 4 sous ensembles : F et B, F et $\overline{B}$, M et B , M et $\overline{B}$.



<u>Définition:</u> Ces 4 sous ensembles forment ce qu'on appelle **une partition** de E, ce qui signifie que leur intersection 2 à 2 est nulle (ils ne se chevauchent pas) et leur réunion est égale à E.

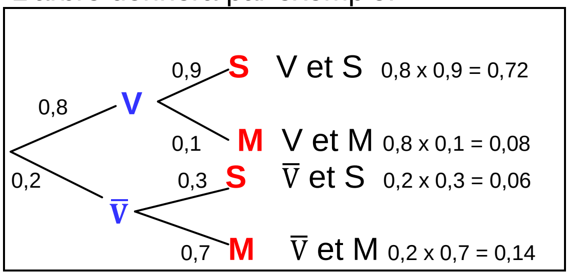
En supposant que la population comporte 52% de femmes et 48% d'hommes, on peut illustrer le mécanisme de la partition par l'arbre suivant:



Les 2 premières branches représentent la dissociation de E selon le sexe en 2 sous ensembles de fréquence respective 0,52 et 0,48.
Les branches suivantes représentent la dissociation de chaque sexe en 2 sous ensemble B et $\overline{B}$ de fréquence respective 0, 2 et 0,8.
Au total on obtient une partition en 4 sous ensembles dont la fréquence est donnée par le produit des fréquences qui pondèrent les branches menant au sous ensemble de la partition.
Par exemple la fréquence de {**F et B**} est donnée par le produit 0,52 par 0,2.

Caractères liés

Supposons maintenant que l'on distribue dans cette population un vaccin contre une maladie. Au bout d'un certain temps la population va être scindée selon 2 caractères:
L'état de santé: (malade (M) / sain (S)) et le statut par rapport au vaccin (vacciné (V) / non vacciné ($\overline{V}$)).
Les caractères composites terminaux de cette partition seront V et M, V et S, $\overline{V}$ et M, $\overline{V}$ et S.
Mais ces caractères V et M n'étant pas indépendants, la proportion de malades devrait être plus importante chez les non vaccinés que chez les non vaccinés.
L'arbre donnera par exemple:

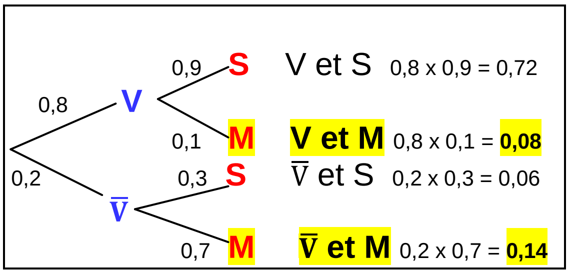


Dans tous les cas
1) la somme des fréquences de chaque fourche doit être 1 (ou 100%)
→ 0,8 + 0,2 = 1 → 0,9 + 0,1 = 1 → 0,3+ +0,7 = 1
2) la somme des fréquences des caractères terminaux portant le caractère V (ou $\overline{V}$) doit être égale à la fréquence de V (ou $\overline{V}$) → 0,72 + 0,08 = 0,8.
3) la somme des fréquences des caractères terminaux portant le caractère S (ou M) est égale à la fréquence de S (ou M) dans la population
→ fréquence de S = 0,72 + 0,06 = 0,78 → 78% de la population est saine.

Probabilités conditionnelles

On peut nous demander par exemple sachant qu'une personne tirée au hasard dans E est malade quelle est la probabilité pour qu'elle soit vaccinée. C'est ce qu'on appelle la probabilité des causes découverte par un mathématicien appelé Bayes.

Dans ce cas on fait un zoom sur le sous ensemble malade (M) .



Sa fréquence dans la population est 0,08 + 0,14 = 0,22 soit 22% .
Tandis que la fréquence des vaccinés et malade est 0,08 soit 8%.
Donc la fréquence des vaccinés parmi les malades est
$\frac{0,08}{0,08+0,14} = \frac{8}{22} = 0,36$

La probabilité de vacciné sachant malade est 0,36 ou 36%.

Ce type de calcul de probabilité est pertinent que les caractères soient dépendants ou indépendants.
Ici les caractères sont déclinés en 2 modalités. On peut imaginer des caractères déclinés en 3 modalités ou plus.
Le nombre de fourches de l'arbre varie mais le principe est le même.

Tirages multiples

Tirages avec remise

On tire 3 fois une carte d'un paquet de 52 cartes en remettant chaque fois la carte tirée dans le paquet.
Nous appelons **épreuve** l'ensemble des 3 tirages et résultat de l'épreuve l'ensemble des 3 cartes tirées.
Le résultat d'une épreuve est donc un triplet (**a,b,c**) où **a** est le résultat du 1er tirage, **b** le résultat du 2e , **c** le résultat du 3e.
On s'interroge sur la probabilité de tirer 3 fois l'as de pique ou par exemple l'as de pique, le roi de cœur, la dame de carreau.

L'univers est le même d'un tirage à l'autre. Donc l'évènement résultat de chaque tirage est indépendant du précédent.
Lors d'un tirage les 52 cartes sont équiprobables. Lors d'une épreuve, la même carte peut être tirée plusieurs fois.
Donc si p est la probabilité d'un tirage, la probabilité de tirer n éléments particuliers au cours de n tirages est $p \times p \times \ldots \times p = p^n$

P(♠A ET ♠A ET ♠A) = $\frac{1}{52} \times \frac{1}{52} \times \frac{1}{52} = \frac{1}{140608}$
Mais pour calculer P(♠A ET ♥R ET ♦D) une précision s'impose.
Veut – on calculer la probabilité d'obtenir le ♠A au 1er tirage, le ♥R au 2e tirage et la ♦D au 3e tirage?
Dans ce cas cela correspond a une issue unique donc la probabilité de l'évènements est aussi $\frac{1}{140608}$.
Mais si on considère que l'ordre dans lequel on obtient ces 3 cartes est indifférent, (le protocole de l'expérience aléatoire nous l'imposant), cela veut dire que toute permutation de ces 3 cartes au cours des tirages sera considérée comme une issue équivalente. Et comme il existe 3! soit 6 façons différentes de les tirer, 6 façons de permuter ces 3 cartes de sorte que leur ordre change, 6 résultats d'épreuves possibles (6 issues) pour l'évènement {♠A, ♥R, ♦D} alors qu'il en existe un seul pour {♠A,♠A,♠A}, la probabilité cherchée devient donc $\frac{6}{140608}$

Une autre façon de résoudre ce problème est de dénombrer les issues dans Ω et dans l'évènement.
On peut considérer que compte tenu du libellé du problème, les 3 cartes tirées dans un ordre donné constituent un résultat de l'épreuve et donc une issue (élément de l'univers). Si nous devons construire l'univers, il est composé de tous les triplets de la forme (a,b,c) où a est le résultat du 1er tirage, b le résultat du 2e , c le résultat du 3e . Comment dénombrer cet univers?
Il est équivalent de tirer successivement 3 fois dans un jeu de carte reconstitué ou de tirer simultanément une carte de 3 jeux de cartes semblables qu'on appellera A, B, C .
Cela revient à tirer un triplet (a,b,c) où $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$.
On reconnait le problème de dénombrement d'un ensemble produit.
Le nombre d'éléments de l'univers, le nombre de triplets (a,b,c) qu'on peut ainsi constituer est donc 52 x 52 x 52 = 140608.
Les triplets sont ordonnés par définition (a,b,c) ≠ (a,c,b), mais le protocole nous demande la probabilité d'obtenir 3 cartes données sans prendre en considération l'ordre dans lequel elles ont été tirées. On en déduit que toute permutation d'une issue appartient au même évènement. Autrement dit (a,b,c), (a,b,c), (c,b,a) appartiennent à l'évènement {a,b,c}
Or dans l'univers on trouve…
Les évènements de la forme {x,x,x} (3 cartes identiques) qui contiennent une seule issue.
Ceux la forme {x,x,y} (2 cartes identiques) qui contiennent 3 issues (x,x,y); (x,y,x); (y,x,x) .
Ceux de la forme {x,y,z} (3 cartes différentes) qui contiennent 6 issues (x,y,z); (x,z,y); (y,x,z); (y,z,x); (z,x,y); (z,y,x).
Un évènement à 1 issue de la forme {x,x,x} comme {♠A,♠A,♠A} a donc une probabilité de $\frac{1}{140608}$ et un évènement de la forme {x,y,z} comme {♠A, ♥R, ♦D} formé de 6 issues a 6 fois plus de chance de se produire sa probabilité est $\frac{6}{140608}$.
On retrouve les résultats précédents.

Un autre type de problème: Au cours d'une série de n tirages, un évènement donné se produit X fois ou ne se produit pas.
Sachant que 13 cartes sur 52 sont des piques, quelles sont nos chances, après 3 tirages de tirer 0 pique, 1 pique, 2 piques, 3 piques?
La probabilité de tirer 1 pique lors d'un tirage est $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ et donc la probabilité de tirer une autre couleur que pique est $\frac{3}{4}$.
Si on symbolise le résultat de chaque tirage par P pour pique et N pour non pique, et que nous appelions "épreuve" l'ensemble des 3 tirages, lorsque nous appliquons la loi sur la probabilité de réalisation de 2 évènements indépendants ou plus [P(A et B) = P(A).P(B)] nous avons:
Pour 0 pique un seul résultat d'épreuve (résultat NNN) de probabilité $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \mathbf{\frac{27}{64}}$
Pour 1 seul pique 3 résultats d'épreuves (résultats PNN , NPN, NNP) de probabilité totale $3 \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{27}{64}}$.
Pour 2 piques 3 résultats d'épreuves (résultats NPP, PNP, PPN) de probabilité totale $3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \mathbf{\frac{9}{64}}$
Et pour 3 piques 1 résultat d'épreuve (résultat PPP) de probabilité $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{64}}$
On remarque que
- une issue est le résultat d'une épreuve composée de 3 tirages (PNN et NPN sont 2 issue différentes).
- Dans l'univers il y a autant d'issues que de résultats d'épreuves possibles (2 possibilités par tirage, 3 tirages, 2^3= 8 issues).
- Un évènement est formé par toutes les issues comportant le même nombre de P. Il y a donc les évènements 0 P, 1 P, 2 P, 3 P. Les issues composant un évènement ont toutes la même probabilité.
- La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des issues qui la composent.
- En sommant les probabilités de tous les évènements, (ou de toutes les issues) on trouve 1.
- Si une épreuve était composée de **n** tirages, le nombre d'issues pouvant donner **p** piques serait $\left[{n \atop p}\right]$.

Tirages sans remise

Problème no 1 On tire successivement 3 cartes d'un paquet de 52 cartes, sans remettre la carte tirée dans le paquet.
Quelle est la probabilité P pour qu'à la fin de l'épreuve on ait en main ♠A,♥R et ♦D?

Remarques préliminaires:
- Le protocole néglige l'ordre des épreuves on peut tirer (par exemple) le ♠A au 1er tirage comme au 2^{e} ou au 3^{e}.
- La nature de l'univers changeant à chaque tirage, les évènements ne sont pas indépendants.

Pour le calcul, on peut procéder de différentes façons.

Calcul no 1

La probabilité de tirer une carte particulière (par exemple ♠A) au premier tirage est P(♠A) = $\frac{1}{52}$

Puis la probabilité conditionnelle P(♥R) sachant ♠A réalisé est $P_{\spadesuit A}(\heartsuit R) = \frac{1}{51}$

Puis la probabilité conditionnelle P(♦D) sachant ♠A ET ♥R réalisés est $P_{\spadesuit A\text{ ET }\heartsuit R}(\diamondsuit D) = \frac{1}{50}$

Donc la probabilité de tirer ♠A puis ♥R puis ♦D (autrement dit le triplet (♠R, ♥R,♦D)) est $\frac{1}{52}\text{x}\frac{1}{51}\text{x}\frac{1}{50} = \frac{1}{132600}$
Mais comme toute permutation de ces 3 évènements constitue une épreuve favorable et que cela fait 3! = 6 épreuves favorables de même probabilité, la probabilité cherchée est $\frac{6}{132600} = \frac{1}{22100}$

Calcul no 2

Les 3 évènements étant incompatibles P(♠A OU ♥R OU ♦D au 1er tirage) = $\frac{3}{52}$

L'un des ces évènements étant réalisé la probabilité de réaliser l'un ou l'autre des 2 restants est $\frac{2}{51}$

Et enfin 2 de ces évènements étant réalisés la probabilité de réaliser le 3^{e} est $\frac{1}{50}$

Donc la probabilité cherchée est $\frac{3}{52}\text{x}\frac{2}{51}\text{x}\frac{1}{50} = \frac{1}{22100}$

Calcul no 3

On peut calculer la probabilité $\overline{\text{P}}$ de tirer 0 ou 1 ou 2 de ces cartes et puis dire que P=1- $\overline{\text{P}}$
Mais ce calcul est inutilement compliqué.

Calcul no 4.

On peut compter le nombre de combinaisons possibles de 52 cartes 3 par 3 soit $\left[{3 \atop 52}\right] = \frac{52\text{x}51\text{x}50}{3\text{x}2\text{x}1}$ =22100

Et comme une seule de ces issues est l'évènement favorable → P = $\frac{1}{22100}$

Remarque: Dans le cas d'un tirage sans remise …
<u>Si on néglige l'ordre des tirages</u>
Le dernier calcul prouve que il est équivalent de faire p tirages successifs ou de prélever en une seule fois p objet parmi les n du paquet.
Les issues possibles sont les combinaisons de n objets p à p.
<u>Si on ne néglige pas l'ordre des tirages</u>
Les issues possibles sont les arrangements de n objets p à p.

Problème no 2. On s'intéresse aux objets tirés non pas en tant qu'individus mais en tant que porteurs d'un caractère.
Sur 3 tirages sans remise quelle est la probabilité de tirer 2 piques et un cœur (13 piques et 13 cœurs parmi les 52 cartes).

Calcul numéro 1

3 épreuves favorables (P pour pique et C pour cœur)

PPC probabilité $\frac{13}{52}\text{x}\frac{12}{51}\text{x}\frac{13}{50} = \frac{2028}{132600}$

PCP probabilité $\frac{13}{52}\text{x}\frac{13}{51}\text{x}\frac{12}{50} = \frac{2028}{132600}$

CPP probabilité $\frac{13}{52}\text{x}\frac{13}{51}\text{x}\frac{12}{50} = \frac{2028}{132600}$

Donc la probabilité cherchée est $3 \times \frac{2028}{132600} = \frac{6084}{132600} = \frac{1014}{22100}$

Calcul no2

Il existe $\left[{52 \atop 3}\right] = \frac{52\text{x}51\text{x}50}{3\text{x}2\text{x}1}$ =22100 combinaisons possibles de 52 cartes 3 par 3.

Parmi elles il faut compter celles qui contiennent 2 piques et un cœur or il existe $\left[{13 \atop 2}\right]$ = 78 combinaisons de 2 piques et 13 combinaisons de 1 cœur en associant chaque combinaison de 2 piques à chaque combinaison de 1 cœur on trouve 78 x 13 = 1014 combinaisons de 2 piques ET 1 cœur.

Donc la probabilité cherchée est P = $\frac{1014}{22100}$, ce qui confirme le résultat précédent.

On peut noter le procédé pour calculer le nombre de combinaisons marquées par 2 modalités (ici 2 ♠+ 1 ♥) ou plus.

Variables aléatoires

On utilise une **variable aléatoire** quand les éléments d'un ensemble sont marqués par un caractère quantitatif comme le poids, l'âge, le nombre d'enfants, le prix, la contenance, la longueur, la surface, etc …
Ou quand les éléments d'un ensemble sont eux même des nombres, comme par exemple le nombre de fois qu'on a obtenu le 6 au cours de 20 jets d'un dé, ces 20 jets étant répétés 100 fois.

Supposons un ensemble E d'effectif N fini.
A chacun des N éléments on affecte une variable numérique aléatoire X qui prend n valeurs différentes de X1 à Xn. ($n \leq N$).
On dit des éléments qui partagent la même variable aléatoire Xi qu'ils forment **la classe Xi**.
Quelquefois on ne connait pas précisément la valeur de la variable aléatoire attachée à un élément donné mais on sait qu'elle se situe dans un intervalle. Par exemple $xi \in [10\,;\,15]$. Dans ce cas la classe est l'intervalle en question.
La classe Xi a un effectif Ni et la **fréquence** de cet effectif dans E est $Fi = \frac{Ni}{N}$.

Loi de probabilité de X

Remarquons d'ores et déjà que si on devait procéder à un tirage aléatoire sur E, on aurait $Pi = P(X = Xi) = Fi$
Et l'ensemble des couples (Xi, Pi) ou (Xi, Fi) formerait ce qu'on appelle la **loi de probabilité de X.**
On appelle **fonction de répartition de X** la fonction qui a un nombre x quelconque fait correspondre $P(X \leq x) \in [0\,;\,1]$

La fonction de répartition de x est $R(x) = P(X \leq x)$

● L'espérance mathématique de X

Est le nombre que l'on obtiendrait si on faisait la moyenne des X obtenus en procédant à un grand nombre de tirages sur E, la probabilité de tirer Xi étant Pi.

L'espérance mathématique de X est $E(X) = \sum XiPi$

Indicateurs de la répartition de X dans E

● La moyenne de X dans E

$\bar{X} = \frac{N1X1+N2X2+\cdots\ldots NnXn}{N}$ ou bien $\bar{X} = F1X1 + F2X2 + \cdots . FnXn = \sum_i FiXi$ (somme sur i des FiXi)

La moyenne de X est $\bar{X} = \sum FiXi$

Si les classes sont des intervalles, Fi fréquence de l'intervalle et Xi milieu de l'intervalle.

à rapprocher de l'espérance mathématique (en général Pi = Fi et $E(X) = \bar{X}$)

● La variance de X qui est la moyenne des carrés de l'écart à la moyenne de X.

Traduit la dispersion de X autour de la moyenne.
L'écart à la moyenne de Xi est $(Xi - \bar{X})$. Son carré est $(Xi - \bar{X})^2$. Et la moyenne de ces carrés est $\sum Fi\,(Xi - \bar{X})^2$.

La variance de X est $V(X) = \sum Fi\,(Xi - \bar{X})^2$

Il est souvent plus simple de calculer la variance comme la différence entre la moyenne des carrés et le carré de la moyenne

$V(X) = (\sum FiXi^2) - \bar{X}^2$

● L'écart type

Utile pour caractériser ce qu'on appellera "les lois à densité" est égal à la racine carrée de la variance.

L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

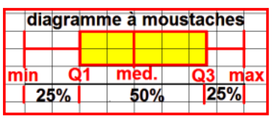
● Propriétés à connaître.

Si a et b sont des nombres quelconques, si X et Y sont 2 variables aléatoires

$E(X+Y)= E(X)+E(Y)$	$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$	$E(aX+b)= aE(X)+b$	$V(aX+b) = a^2\,V(X)$	$\sigma(aX+b) = \lvert a\rvert\,\sigma(X)$

Indicateurs de position des classes de X rangées par valeurs croissantes de X

Mode : valeur de X dont la fréquence est optimale.
Si les classes sont formées d'intervalles de valeurs de X, la **classe modale** est celle dont la fréquence par unité de longueur est optimale.
Effectif cumulé $N(X < Xi)$ = somme des effectifs de classes pour lesquelles $X < Xi$
Fréquence cumulée $f(X < Xi)$: somme des fréquences de classes pour lesquelles $X < Xi$
En cumulant l'effectif des classes Σ Ni dans le sens des X croissants, il arrive un moment où je franchis le seuil correspondant à une fraction donnée de la population **k.N** (K fractionnaire < 1). Ce franchissement se produit dans une classe et à cette classe correspond une valeur de X dont le nom dépend du seuil franchi.
Si k = ½ on parle de **Médiane** La médiane est la valeur Xi pour laquelle ni $N(X < Xi)$ ni $N(X > Xi)$ ne sont supérieurs à la moitié de l'effectif.



Si K est exprimé en quarts on parle de **quartiles** (1er, 2e ou 3e quartile: Q1, Q2, Q3)
Si K est exprimé en dixièmes on parle de **déciles** (du 1er au 9e décile)
Si K est exprimé en centièmes on parle de **centiles** (du 1er au 99e centile)
Par exemple, si 5 est le 3e décile, moins de 3/10 de la population a X <5 et moins de 7/10 de la population a x > 5.

La loi binomiale

Le nombre de combinaisons de n éléments p à p peut s'écrire $\mathbf{C_n^p}$ ou $[\binom{n}{p}]$
n [nCr] **p** ou **n** [nCp] **p** sur une calculatrice.

Pré requis

- connaitre les définitions de l'espérance, la variance, l'écart type.
- Savoir que

E(X+Y)= E(X)+E(Y)	**V(X+Y)=V(X)+V(Y)**	**E(aX+b)= aE(X)+b**	**V(aX+b) = a^2 V(X)**	**σ(aX+b) = |a| σ(X)**

- Savoir que P(E1 et E2 et E3 et … et En) = P(E1) .P(E2)……P(En) quand les évènements sont indépendants ce qui est le cas soit dans des tirages avec remise, soit dans des tirages opérant sur une population nombreuse la probabilité de E2 ne changeant pratiquement pas après E1.

1) Le contexte

On tire un ou plusieurs éléments dans une population et on recherche sur eux un caractère quelconque.
Par exemple on recherche si l'élément tiré est malade (s'il a les cheveux bruns, s'il pèse plus de 50kg , s'il vote pour Pipo,…).
Sur chaque élément soit le caractère cherché est présent (probabilité p) soit il n'est pas présent (probabilité 1- p = q)

2) On définit une variable de Bernouilli B liée à l'évènement recherché lors d'un tirage unique.
B est telle que B = 1 si l'élément possède le caractère recherché et B = 0 si ce n'est pas le cas.
On a donc P(B=1) =p et P(B=0) = q.
On vérifie que **E(B)** = 0.q + 1.p **= p**
On ne peut parler au sens strict de "la moyenne de B" mais on comprend que si p=30% par exemple dans la population on a 30% de B = 1 et 70% de B = 0 donc p= 30% est la moyenne de B. ($\overline{B}$ = 30%. 1 + 70%. 0)
Donc **V(B)** = $(0-p)^2$ q + $(1-p)^2$ p = $-p^2(q+p)$ + p = $-p^2$ + p = p(1 – p) **= pq** puisque p+q = 1
Et l'écart type **σ(B) =** $\sqrt{\mathbf{pq}}$

3) Maintenant on tire un échantillon de n éléments de la population, par exemple 4 et on cherche la probabilité de trouver X fois le caractère recherché dans l'échantillon tiré.
X est une variable binomiale qui peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ou 4.
Si B1, B2, B3, B4 sont les variables de Bernoulli de chacun des 4 tirages, on a X=B1+B2+B3+B4.
Si par exemple les variables de Bernoulli des 4 tirages sont |1101| cela signifie qu'on a trouvé 3 fois le caractère cherché.
X=3 . X =1+1+0+1 est la somme de n variables B dont on connait l'espérance, la variance, l'écart type on peut donc dire que
E(X) = np , **V(X)= npq** , **σ(X) =** $\sqrt{\mathbf{npq}}$ ici n = 4.

4) Le calcul de P(X=k) détermine la loi de probabilité de X qu'on appelle **loi B(n,p) ici loi B(4,p)**
une seule combinaison peut donner X = 0 c'est B1=0, B2=0, B3=0 et B4 =0 soit |0000| de probabilité q^4
P(X=0) = q.q.q.q = q^4.
Pour X = 1 le résultat des tirages peut être |1000| 0100 | 0010| 0001| 4 combinaisons de probabilité p.q.q.q =pq^3.
P(X=1) = 4 pq^3.
Pour X = 2 conviennent |1100 | 1010| 1001| 0110| 0101|0011| soit 6 combinaisons chacune ayant la probabilité p^2q^2 .
P(X=2) = 6 p^2q^2 .
Pour X = 3 conviennent |0111| 1011| 1101| 1110| soit 4 possibilités chacune de probabilité p^3q.
P(X=3) = 4 p^3q
Enfin pour X = 4 une seule possibilité, tous les B = 1 soit |1111| de probabilité p^4 .
P(X=4) = p^4.
En somme pour X = k il faut k tirages avec B = 1 et n-k avec B=0. Toute combinaison de k tirages parmi 4 convient.
Par exemple pour k = 2 on peut dire qu'on trouve B = 1 pour les tirages numéros 1 ou 2 ou pour les tirages nos 1 et 3 , et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les combinaisons de 2 rangs de tirages.

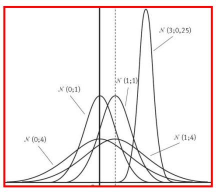
5) Passons au cas général.

On tire une échantillon de n éléments, le caractère recherché peut être trouvé X fois, X variant de 0 à n.
La probabilité P(X = k) est donnée par la formule **P(X = k) =**$[\binom{n}{k}]$ $\mathbf{p^k\ q^{n-k}}$.
Le coefficient $[\binom{n}{k}]$ (n nCr k sur la calculatrice) est le nombre de combinaisons donnant k fois B= 1 sur les n tirages réalisés.
$\mathbf{p^k\ q^{n-k}}$ est la probabilité de tirer une combinaison donnant pour résultat k fois B=1 et n – k fois B=0.

6) Accessoirement on remarque que

$(p+q)^n$ = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)+…..+P(X=n) = 1^n = 1 autrement dit on peut calculer les coefficients $[\binom{n}{k}]$ grâce au triangle de Pascal. Ces coefficients sont appelés "nombre de combinaisons de k objets qu'on peut faire avec n objets".

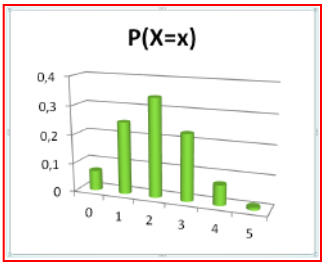
7) Quand n devient grand (en pratique au moins 20 ou 30)



Chaque probabilité P(X=k) devient si petite qu'elle n'a plus de sens on ne s'intéresse plus qu'aux probabilités de type P(X ≥ k) ou P(X ≤ k) ou P(a ≤ X ≤ B) et on a recours aux lois à densité pour calculer ces probabilité (portion d'aire située sous la courbe) grâce aux calculatrices ou aux tables.
On dit que X suit une loi N(m,σ^2) avec E(X) =m et σ(X) = σ.
Tu donnes, m, σ et k à la calculatrice et elle te donne la probabilité P(X≤K) ou au contraire tu donnes la probabilité P(X ≤ k) et la calculatrice te donne k .

Le cheminement des prochains chapitres

Le diagramme à barres représentant la probabilité de X



Soit un évènement qui se produit avec une probabilité 0,4 dans un tirage.
La loi B(5 ; 0,4) nous permet de prédire avec quelle probabilité cet évènement se produira 0 fois, 1 fois , 2 fois, 3 fois, 4 fois , 5 fois (X fois) quand on procèdera à 5 tirages identiques .
Cette probabilité est selon la valeur de X (voir le chapitre précédent)

X	0	1	2	3	4	5
P(X=x)	$(0,6)^5$	$5(0,4)(0,6)^4$	$10(0,4)^2(0,6)^3$	$10(0,4)^3(0,6)^2$	$5(0,4)^4(0,6)^1$	$(0,4)^5$
	0,07776	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,01024

En outre on a **E(X) = 2** (np = 5x0,4) , **V(X) =1,2** (npq=5x0,4x0,6) **σ(X) = 1,09544**

La fréquence Fx de l'évènement sur les 5 tirages prend les valeurs 0/5, 1/5, …..4/5, 5/5 avec la même probabilité que la valeur de X figurant à son numérateur. On a **E(Fx)= p = 0,4** et **σ(Fx)=** $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0,24}{5}} \approx \mathbf{0,22}$

Du diagramme à barres à l'histogramme illustrant la densité de la probabilité de Z

La variable $Z=\frac{Fx-p}{\sigma}$ (p étant la moyenne de Fx, ici 0,4) prend les valeurs suivantes selon la valeur de x avec la probabilité Pr

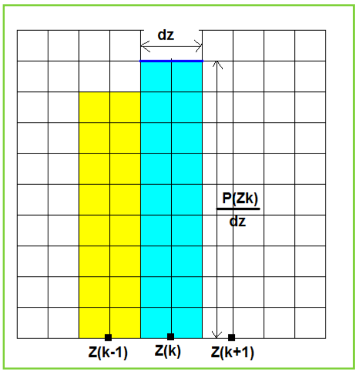
X	0	1	2	3	4	5
Z	**-1,81**	**-0.9**	**0**	**+0,9**	**+1,81**	**+2,72**
Pr	0,07776	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,01024

On remarque que Z a pour moyenne 0 et pour écart type 1.
C'est ce qu'on appelle une variable centrée réduite.

Dans le cas général, quand n varie on a **Z =** $\frac{Fx-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \sqrt{n}\,\frac{\frac{x}{n}-p}{\sqrt{p(1-p)}} = \frac{x}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} - \sqrt{n}\frac{p}{\sqrt{p(1-p)}} \sim \mathbf{2\frac{x}{\sqrt{n}} - 0,8\sqrt{n}}$.

X prenant les valeurs 0, 1, … jusqu'à n , Z varie approximativement de $-0,8\sqrt{n}$ à $1,2\sqrt{n}$ par pas de $\frac{2}{\sqrt{n}}$.
Quand n est très grand les pas sont très petits et Z varie de -∞ à +∞.
On a Z = 0 pour X = np (sa valeur moyenne, soit 5 fois 0,4 dans notre exemple). On dit que Z est centrée.

On a $\mathbf{P(X=k)=[{n \atop k}]p^k q^{n-k}}$. Si on considère Z comme une fonction de X → P(X=k) c'est aussi la probabilité P(Z = Z(k)) .



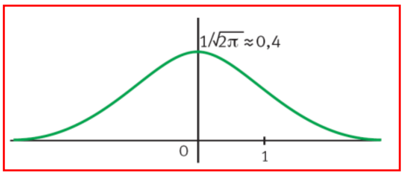
On a donc P(Z=Z(k)) ou P(Zk) = $[{n \atop k}]p^k q^{n-k}$ et Z(k) ~ $2\frac{k}{\sqrt{n}}$ - 0,8 $\sqrt{n}$, k prenant les valeurs 0,1,2 … jusqu'à n.

Donc si à partir de $-0,8\sqrt{n}$ on trace sur l'axe des x une graduation de pas dz = $\frac{2}{\sqrt{n}}$, chaque graduation correspondra a une valeur de z(k).

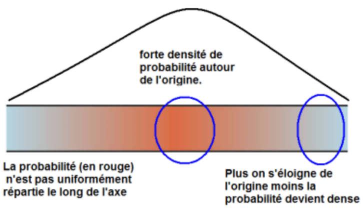
Si on veut représenter la probabilité de chaque z(k) grâce à un diagramme à barres jointives, il suffit de prendre des barres de largeur dz = $\frac{2}{\sqrt{n}}$ et de hauteur f(Zk)= $\frac{P(Zk)}{dz}$ pour que l'aire de chaque barre soit égale à la probabilité P(Zk).
Quand on aura terminé, on aura un diagramme à barres
Couvrant l'intervalle $[-0,8\sqrt{n} ; +1,2\sqrt{n}]$
De barres de largeur $\frac{2}{\sqrt{n}}$
Et dont l'aire totale est égale à la probabilité totale c'est-à-dire 1.
L'aire totale des barres comprises entre z(k1) et z(k2)) est la probabilité pour que Z ∈ à leur intervalle de base.
Si une longueur, une surface, un volume de mesure **m** pèse un poids **p = m.d** alors **d** est la densité moyenne de cette figure. Ici la probabilité que Z appartienne à un intervalle dz_k d'amplitude dz centré sur Zk est
P(Z∈dz$_k$)= dz . f(Zk) (dz = longueur de l'intervalle et P(Z∈dz$_k$) = poids en probabilité de l'intervalle)
Donc f(Zk) (la hauteur de la barre du diagramme) peut être assimilée à une densité de probabilité.

De la densité de probabilité en escalier à la fonction densité de probabilité continue (normale, centrée sur 0)

Que va t – il se passer si n tend vers l'infini?

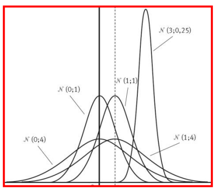


Les valeurs extrêmes de Z qui sont $-0,8\sqrt{n}$ et $+1,2\sqrt{n}$ vont tendre l'une vers -∞ et l'autre vers + ∞
Les valeurs de Z étant de plus en plus rapprochées, les probabilités P(Z) vont aussi être très rapprochées.
On comprend que le profil en escalier de l'histogramme des probabilités va tendre vers une courbe lissée qui aura l'allure ci contre. Si nous cherchons la limite quand n →∞ de la hauteur des barres soit P(z)$\frac{\sqrt{n}}{2}$ nous allons trouver une fonction f(z) qu'on appelle "densité de probabilité" de la loi normale centrée.



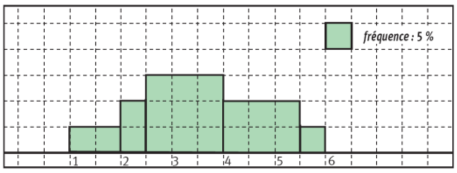
Nous identifierons cette courbe comme celle de la fonction paire $\mathbf{f(z)= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}}$, le calcul confirmera que l'aire située sous la courbe a pour limite 1 quand z tendra vers ±∞ .
Par construction on aura donc P(a < Z < b) = $\int_a^b f(z)dz$ = aire située entre la courbe et l'intervalle [a;b].
Autre fait notable: $\int_{-1,96}^{+1,96} f(z)dz = 0,95$. Autrement dit Z a 95% de chances de se trouver entre -1,96 et +1,96.
On dit que Z de moyenne 0 et d'écart type 1 obéit à la loi normale N(0,1).

De la fonction densité de probabilité normale centrée sur 0 à la fonction densité de probabilité centrée sur la moyenne.



Mais les valeurs de Z n'étant pas faciles à manipuler, on retourne aux valeurs de X en disant si **Z =** $\frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi N(0,1) alors X suit une loi N(m,σ^2) avec E(X) =m et σ(X) = σ
Donc, quand on connaît la moyenne de X (m) et son écart type (σ) sur un grand nombre d'expériences aléatoires, on sait que X suit une loi N(m,σ^2), centrée non plus sur 0 mais sur m (figure ci contre).
Et grâce aux calculatrices on peut calculer par exemple P(X < b) ou P(a < X < b)
Et toutes sortes de données du même type qu'on appelle statistiques.

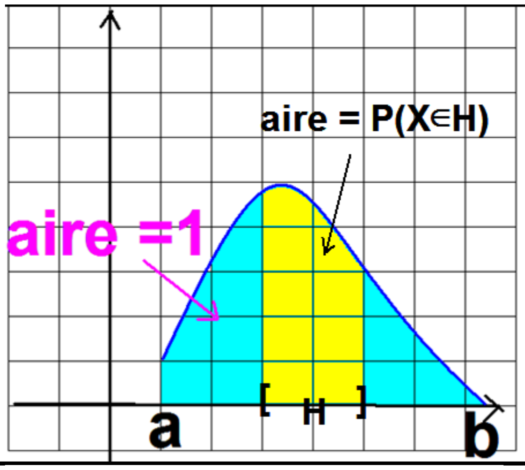
Lois à densité



Classes	[1;2]	[2;2,5]	[2,5;4]	[4;5,5]	[5,5;6]
Fréquences	0,1	0,1	0,45	0,3	0,05

Histogramme des fréquences d'une variable aléatoire à valeurs continues.

Les classes sont des intervalles [a, b] auxquels appartient la variable aléatoire.
Chaque barre de l'histogramme a une hauteur h, une base de longueur b – a et une aire égale à la fréquence de la classe $P(X \in [a,b])$.
On a donc h x (b- a) $= P(X \in [a,b])$
Et la surface totale des rectangles est égale à 1.
Moyenne $\overline{X} = \sum P(X \in [a,b]).\frac{a+b}{2}$
Somme des (Produit fréquence de classe x par milieu de classe)



Densité de probabilité sur un intervalle I.

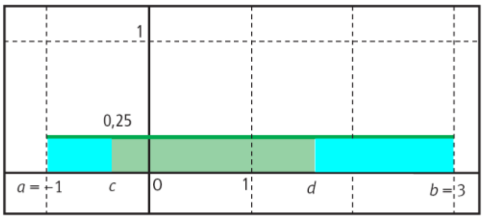
f(t) est une densité de probabilité sur I si f continue et positive sur I et l'aire sous la courbe =1

$$\int_I f(t)dt = 1. \text{ ou } \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)dt = 1$$

- X suit la loi de densité f sur I si pour tout $H \subset I$, $P(X \in H) = \int_H f(t)dt$
- Si $A \subset I$ et $B \subset I$ ($A \cap B = \emptyset$) on a
  $P(X \in A \cup B) = P(X \in A) + P(X \in B)$
- Pour tout $\alpha \in I$ on a $P(X = \alpha) = 0$ et donc
  $P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$
- $P(X \in \overline{A}) = 1 - P(X \in A)$
- Probabilité conditionnelle soit A et B 2 intervalles non nuls

$P_{X \in A}(X \in B) = \frac{P(X \in A \cap B)}{P(X \in A)}$ autrement dit $P(A \cap B) = P(A).P_A(B)$

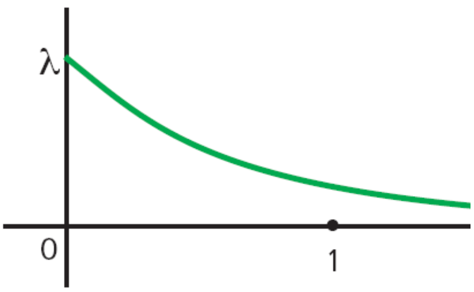
- E(X) sur [a,b] = $\int_a^b xf(x)dx$ (homogène à $E(X) = \sum X_i f_i$)



Loi uniforme

Si la densité de probabilité est une constante on parle de loi uniforme.
Sur l'intervalle [a,b] on a donc forcément $f(t) = \frac{1}{b-a}$ pour que $\int_a^b f(t)dt = 1$.

- $P(X \in [c,d]) = \frac{d-c}{b-a}$.
- $E(X) = = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}$ (moyenne de a,b)



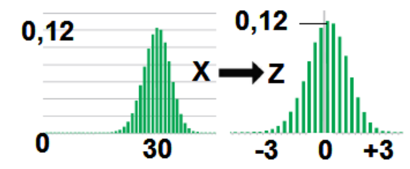
Loi exponentielle

Si la densité de probabilité est de la forme $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0$ on parle de loi exponentielle. On a $\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt = 1$

- $P(X \in [c,d] = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$
- pour a>0 on a $P(X > a = e^{-\lambda a}$
- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ (la primitive de $\lambda t e^{-\lambda t}$ est $(-t - \frac{1}{\lambda})e^{-\lambda t}$)
- Probabilité conditionnelle P (si X >t que X>t+h) = $P(X > h) = e^{-\lambda h}$

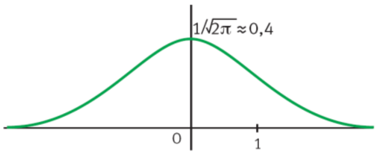
(durée de vie sans vieillissement. Sachant qu'un appareil fonctionne bien au temps t, quelle est la probabilité qu'il fonctionne au temps t+h?)

Lois normales



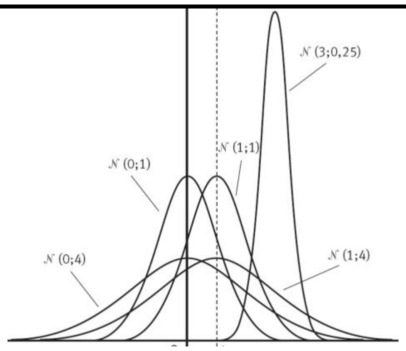
Une **variable aléatoire X est dite centrée réduite** si E(X)=0 et σ(X)=1
Soit la variable X de loi binomiale B(n,p) d'espérance E(X)=m
et d'écart type σ_0.
Alors la variable $\mathbf{Z_n} = \frac{\mathbf{X-m}}{\boldsymbol{\sigma_0}} = \frac{\mathbf{X-np}}{\sqrt{\mathbf{np(1-p)}}}$ est une variable centrée réduite.

On a $\lim_{n\to\infty} P(a < Zn < b) = \int_a^b \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ (loi de Moivre et Laplace)



Loi normale centrée réduite N(0,1) si la densité de probabilité est
$f(x)= \frac{1}{2\pi} e^{-x^2}$ (fonction paire, graphe symétrique par rapport à Oy)

- si a est positif P(X< - a) = P(X > a) et notamment P(X<0) = P(X >0) = $\frac{1}{2}$
- E(X)=0 ● V(X)=σ(X) = 1
- Soit a ∈]0,1[, il existe un nombre unique positif b_a tel que
  P(X∈[-b_a,+b_a]) = a
- En particulier P(X∈[-1,96, +1,96])=95% et P(X∈[-2,58,+2,58])=99%



Loi normale N(m,σ²)
X suit N(m,σ²) si $\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{X-m}}{\boldsymbol{\sigma}}$ suit la loi N(0,1)

- Le graphe de la densité de probabilité est centré sur m et d'autant plus resserré autour de la moyenne que σ est petit.
- E(X)=m et σ(X) = σ.
- Soit Ir un intervalle centré sur m de rayon r

on a P(X∈Iσ)≈0,68 P(X∈I_2σ)≈0,95 P(X∈I_3σ)≈0,997
Ce qu'on peut interpréter par exemple comme P(X ∈[m - 2σ; m +2σ] = 95%.

Intervalle de fluctuation asymptotique

Xn obéit à B(n,p) , de fréquence Fn =$\frac{X_n}{n}$, on a **E(Fn) = p** et $\sigma = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$.

● Z=$\frac{Fn-p}{\sigma}$ obéit a une loi N(0,1) quand n →∞ donc une table ou une calculatrice peut nous donner ba tel que par exemple P(Z ≤ -b_a) = 2,5% et la symétrie de la courbe nous permet d'écrire que P(Z ≥+b_a) = 2,5%. D'où on déduit P(Z∈[-b_a,+b_a])= 100%-2,5% -2,5% = 95% .
Autrement dit quel que soit le pourcentage a , ∃b_a | P(Z∈[-b_a,+b_a])=a
Or $\frac{Fn-p}{\sigma}$ ∈[-b_a,+b_a] équivaut à Fn∈ [p-b_aσ ; p+ b_aσ]. Autrement dit le nombre b_a est déterminé à partir de la loi normale et quand n sera assez grand la probabilité P(Fn∈ [p-b_aσ ; p+ b_aσ]) tendra asymptotiquement vers a.

● Si a =95% on a b_a =1,96 et quand n sera très grand on aura 95% de chance pour que

Fn ∈ $[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$

Pratiquement on exige n > 30, np et n(1-p) ≥ 5 .
En supposant qu'on mesure la fréquence Fn avec laquelle on va obtenir face en lançant une pièce équilibrée sur 100 lancers.
On aura p = 0,5 et $\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = \frac{0,5}{10}$ = 0,05 d'où 1,96 x 0,05 = 0.098 et donc 95% des mesures devraient situer Fn entre 0,5-0.098 et 0,5+0.098 soit entre 0,402 et 0,598 c'est l'intervalle de fluctuation asymptotique de Fn.

● Comme p(1-p) ≤ $\frac{1}{4}$ on a $[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}] \subset [p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p \mp \frac{1}{\sqrt{n}}]$
et le second intervalle constitue donc un intervalle de fluctuation au seuil de 95% imprécis mais acceptable.

Décision

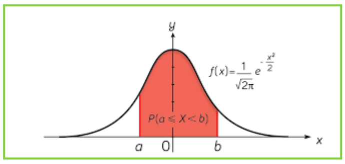
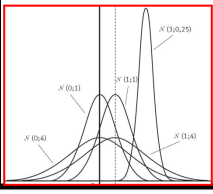
Si la fréquence F observée dans un échantillon appartient à un intervalle de fluctuation au seuil de 95% on considère que l'échantillon est compatible avec le modèle. Sinon on le rejette.
On peut aussi utiliser cette loi pour juger le caractère aléatoire d'une machine qui doit produire une fréquence p.
Une machine de casino doit donner en moyenne 6 gagnants sur 100 tirages. (fréquence 0,06.)
Sur 400 tirages un test sur une machine doit donner n gagnants avec $\frac{n}{200}$ entre 0,06 – $\frac{1}{\sqrt{400}}$ et 0,06 + $\frac{1}{\sqrt{400}}$ soit entre 0,01 et 0,11.
Sinon il faut la régler ou la réformer.

Estimation d'une proportion p à partir d'un échantillon de taille n:
On remarque que f∈[p-a; p+a] est équivalent à p∈[f – a ; f + a]
On se place dans un échantillon d'au moins 30 éléments, on mesure la fréquence f et on l'accepte si nf ≥ 5 et n(1 – f) ≥5.
On estime que p = f avec **un intervalle de confiance** de $[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ au risque de 95%.
La **précision** est de $\frac{2}{\sqrt{n}}$.
$[f - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; f + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$ est aussi un intervalle de confiance que l'on utilise parfois.
Si on estime par exemple le résultat d'un sondage réalisé sur 400 personnes et donnant une proportion de 52% des votes pour un candidat, l'intervalle de confiance de ce sondage est [0,52 – $\frac{1}{\sqrt{400}}$; 0,52 + $\frac{1}{\sqrt{400}}$] soit [0,47 , 0,57] ou 47% à 57%.
Si on sonde 1000 personnes on obtient une précision de ± 3% environ au lieu de ±5%.
Avant tout on doit vérifier que nf > 5 (c'est le cas de 400 x 0,52) et n(1-f) ≤ 5 (c'est le cas de 400 x 0,48)

SYNTHESE

● **Propriétés à connaître.** Si a et b sont des nombres quelconques, si X et Y sont 2 variables aléatoires

E(X+Y)= E(X)+E(Y)	**V(X+Y)=V(X)+V(Y)**	**E(aX+b)= aE(X)+b**	**V(aX+b) = a^2 V(X)**	**σ(aX+b) = $\lvert a\rvert$ σ(X)**

Variable de Bernouilli B	Un tirage a 2 issues possibles : la réussite (probabilité p) l'échec (probabilité q = 1-p). On pose B = 1 si réussite B = 0 si échec	E(B) = 1p+0q = **p** V(B)=)= $\sum fi(Bi - \bar{B})^2$ =p(1-p)^2 +q(0- p)^2 = pq^2+qp^2 **=pq(q+p)= pq**
Variable binomiale X	On effectue n tirages de type Bernouilli et on s'intéresse au nombre de succés ou d'échecs. X = B1+B2+…+Bn somme de n variables de Bernouilli.	**E(X) = np** calcul E(X1+X2)=E(X1)+E(X2) **V(X) = npq** calcul V(X1+X2)=V(X1)+V(X2) **σ(X) = $\sqrt{npq}$**
Fréquence Fx de X	On s'intéresse à la fréquence de X sur n tirages soit Fx = $\frac{X}{n}$, c'est-à-dire au % de la propriété étudiée dans l'échantillon	**E(Fx)=p** $\left(E(\frac{X}{n}) = \frac{E(X)}{n}\right)$ **V(Fx) =$\frac{pq}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$** $\left(V(\frac{X}{n}) = \frac{V(X)}{n^2}\right)$ **σ(Fx) = $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$**
Variable Z centrée	Z=$\frac{Fx-p}{\sigma}$ $=\frac{Fx}{\sigma} - \frac{p}{\sigma}$	E(Z) = $\frac{E(Fx)}{\sigma} - \frac{p}{\sigma} = \frac{p}{\sigma} - \frac{p}{\sigma} = 0$ (centrée) **V(Z)**= $\frac{1}{\sigma^2}$V(Fx)= $\frac{\frac{p(1-p)}{p}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{p}}^2} = \mathbf{1}$ (réduite) **σ(Z) =1**
Variable Z centrée réduite quand n → ∞	On dit que Z obéit à la loi normale N(0,1). P(Z =a) n'a plus aucune signification on s'intéresse à la probabilité de Z dans un intervalle P(a ≤ Z ≤b). La densité de probabilité est **f(z)=** $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}z^2}$  P(a < Z < b) $=\int_a^b f(z)dz$ = aire située entre la courbe et l'intervalle [a;b]. Autre fait notable: $\int_{-1,96}^{+1,96} f(z)dz = 0,95$. Autrement dit Z a 95% de chances de se trouver entre -1,96 et +1,96.	
Variable X obéissant la loi normale N(m,σ^2) quand n → ∞	la densité de probabilité doit être **f(x)=** $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}$ le cas précédent est un cas particulier avec m = 0 et σ^2= 1. Si Z est centrée réduite Fx obéit à cette loi. Soit Ir un intervalle centré sur m de rayon r  on a P(X∈Iσ)≈0,68 P(X∈I_2σ)≈0,95 P(X∈I_3σ)≈0,997 Ce qu'on peut interpréter par exemple comme P(X ∈[m - 2σ; m +2σ] = 95%.	Dans une population on prélève un échantillon important et on s'intéresse à la fréquence d'un caractère de moyenne m et d'écart type σ. Cette fréquence obéit à N(m,σ^2). Une calculatrice peut donner Connaissant a et b →P(a ≤ x ≤ b) Connaissant P(X ≤ a) → la valeur de a Pour connaître a et b tels que P(a ≤ x ≤b) > 95% On cherche a tel que P(x ≤ a) < 2,5% b tel que p(x ≤ b) < 97,5% . On juge que l'échantillon est acceptable ou pas en comparant la valeur mesurée de Fx à ces limites.

Intervalle de fluctuation asymptotique

● Si dans un échantillon de n tirages on mesure une proportion Fn qui devrait être égale à p on aura 95% de chance pour que

Fn ∈ [p – 1,96$\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$; p +1,96$\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$]

Autrement dit 95% des résultats des sondages doivent vérifier cette double inégalité.
Pratiquement on exige n > 30, np et n(1-p) ≥ 5 .

● Comme p(1-p) ≤ $\frac{1}{4}$ on a [p – 1,96$\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$; p +1,96$\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$] ⊂ **[p - $\frac{1}{\sqrt{n}}$, p + $\frac{1}{\sqrt{n}}$]**

et le second intervalle constitue donc un intervalle de fluctuation au seuil de 95% imprécis mais acceptable.

Décision

Si la fréquence F observée dans un échantillon appartient à un intervalle de fluctuation au seuil de 95% on considère que l'échantillon est compatible avec le modèle. Sinon on le rejette.
On peut aussi utiliser cette loi pour juger le caractère aléatoire d'une machine qui doit produire une fréquence p.
Là encore on connait la fréquence théorique et on vérifie que la fréquence mesurée appartient à son intervalle de fluctuation asymptotique au risque de 95% (par exemple).
Si ce n'est pas le cas, il y a un problème→ on rejette l'échantillon, on réforme ou on règle la machine.

Estimation d'une proportion p à partir d'un échantillon de taille n:
On remarque que f∈[p-a; p+a] est équivalent à p∈[f – a ; f + a]
On se place dans un échantillon d'au moins 30 éléments, on mesure la fréquence f et on l'accepte si nf ≥ 5 et n(1 – f) ≥5.
On estime que p = f avec **un intervalle de confiance** de **[f - $\frac{1}{\sqrt{n}}$, f + $\frac{1}{\sqrt{n}}$]** au risque de 95%.
La **précision** est de $\frac{2}{\sqrt{n}}$.
[f – 1,96$\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$; f +1,96$\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$] est aussi un intervalle de confiance que l'on utilise parfois.
Cette fois on veut estimer une fréquence inconnue et on procède par sondages de n tirages, sur lesquels on évalue la fréquence $\frac{X}{n}$ (x étant la somme des variables de Bernoulli), l'intervalle de fluctuation asymptotique de la valeur trouvée est appelé intervalle de confiance.

Programmation et calculatrice

Sous tableur (Excel / libre office / Open office) simuler 1000 lancers de dé.

Tirage	= ENT(6*ALEA( )+1)	extension formule	A1:A1000 + entrée dans le champ A1puis menu édition / remplissage
Compter le nombre de "1"	en B1 =NB.SI(A$1:A$1000 ;1)	calcul fréquence	en C1 =B1/1000

Pour simuler un tirage aléatoire de 10 objets parmi 100 sans remise sous basic

1) On crée le tableau qui va contenir les objets →
le tableau qui va contenir le résultat des tirages
la variable qui contient le nombre de tirages
la variable qui définit le nombre de boites
2) On remplit le tableau des objets avec des nombres de 1 → à 100 chaque nombre symbolisant un objet
3) On ouvre une boucle sur les tirages →
4) On tire un nombre entier aléatoire x de 1 à nb →
(rnd réel aléatoire $\in [0,1[$, int () = partie entière)
5) x = no de boite tirée on met son contenu dans 1er tirage. →
6) à partir du rang x on remplit chaque boite par le contenu→ de la boite suivante, ce qui revient à supprimer la boite tirée et à diminuer de 1 le nombre de boites.
7) On boucle sur le tirage suivant →

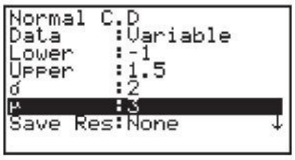
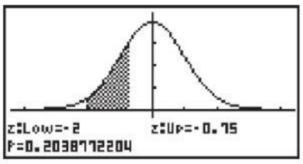
```
dim boite (100) as integer
dim tirage (10) as integer
dim ntir = 10
dim nb = 100
for i = 1 to 100 : boite(i) =i : next i

for t =1 to ntir
x = int(rnd*nb)+1

tirage(t)=boite(x)
for i =x to nb – 1 : boite(i)=boite(i+1) : next i
nb = nb -1

next t
```

Donc en somme, la 1ere fois on tire au hasard une boite sur 100, on met son contenu dans le tableau des résultats, on efface le contenu de cette boite en remplissant chaque boite avec le contenu de la boite de rang supérieur à partir de la boîte tirée.
On recommence le tirage en tirant au hasard non pas une boîte sur 100 mais une boite sur 99. Ainsi de suite.

Après ça tirage(1) contient le résultat du 1er tirage, tirage (2) le résultat. du 2e tirage et ainsi de suite jusqu'à tirage(10).

Déterminer P(a ≤ X ≤ b) si X a pour moyenne μ et pour écart type σ selon la loi N(μ , σ²)

Par exemple $P(-1 \le X \le 1{,}5) \approx 0{,}203877$ où X suit la loi $\mathcal{N}(3\,;\,4)$.

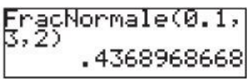
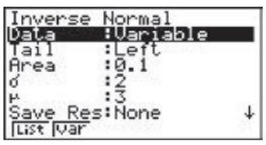
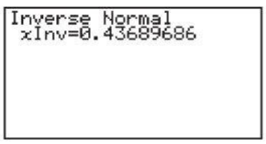
Texas	Casio Graph 35…
On choisit Distr (par 2nd Var) puis normalcdf (ou, en français, normalFRep). On indique les données dans l'ordre a, b, μ et σ (attention à ne pas confondre σ et σ^2). Voici un exemple avec $a=-1$ $b=1{,}5$ $\mu=3$ et $\sigma=2$: 	Dans le menu Stat, on choisit Distr, puis NormCD. On indique les données dans l'ordre a, b, σ et μ (attention à ne pas confondre σ et σ^2). Voici un exemple avec $a=-1$ $b=1{,}5$ $\mu=3$ et $\sigma=2$:  

(Selon le site Académie en ligne)
Les modules de calcul adéquats sont Distr puis normalFrep (TI) ou Stat puis Distr puis Norm CD (Casio)
On passe à la calculatrice les paramètres a, b, moyenne écart type et elle nous donne le résultat.
Problème si on veut connaître P(X ≤ 5)?
il faut donner à a la valeur –∞ et on ne sait pas faire.
Mais il suffit de prendre a =–100000 par exemple et on aura une valeur très voisine de la probabilité cherchée.

Déterminer x tel que P(X ≤ x) = p , p étant une probabilité donnée selon la loi N(μ , σ²).

- Déterminer x tel que $P(X \le x) = p$, p étant une probabilité donnée.

La plupart des calculatrices permettent de trouver directement le résultat.

Texas	Casio graph 35 et plus
On choisit Distr (par 2nd Distr) puis invNorm (ou, en français, FracNorm), puis on donne p, μ et σ. Voici un exemple avec $p=0{,}1$ $\mu=3$ et $\sigma=2$: 	Dans le menu Stat, on choisit Distr, puis Inverse Normal. On indique les données dans l'ordre p, σ et μ . Voici un exemple avec $p=0{,}1$ $\mu=3$ et $\sigma=2$:  

On choisit le même module de calcul que précédemment
Distr (TI) ou Stat puis Distr (Casio) puis on indique à la calculatrice l'opération inverse de l'opération normale soit par invNorm (TI) soit par Inverse Normal (Casio).
Enfin on donne les paramètres p, μ , σ.
Si on veut a et b tels que
P(m - a ≤ X ≤ m + b) ≤ 95% par exemple on cherche
P(X ≤x) ≤ 0,975 avec x = m+b
P(X ≤ y) ≤ 0,025 avec y = m-a
Dans la loi N(0,1) centrée a = b.