Mathématiques

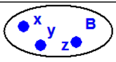
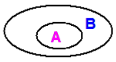
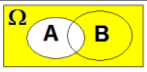
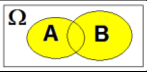
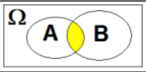
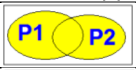
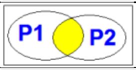
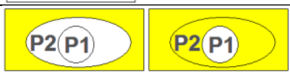
1^{ere} S

Outils de base

Un peu de logique
La droite (fonction linéaire, fonction affine)
Polynômes, second degré, expressions rationnelles
Expressions avec des valeurs absolues
Suites
Trigonométrie

Un peu de logique

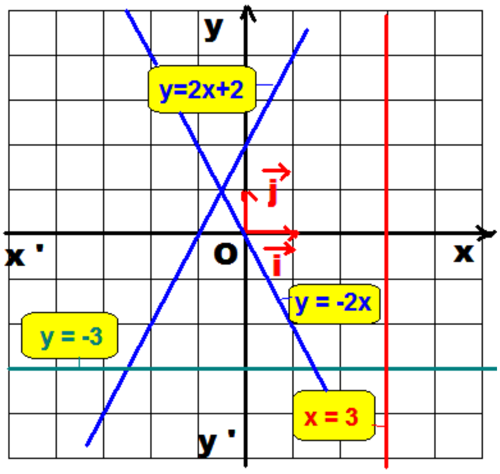
Vocabulaire, concepts, convention d'écriture.

Ensemble	{ x; y; z }	Collection d'éléments, finie ou infinie, possédant une propriété donnée
Cardinal de E	Card(E)	Nombre d'éléments de E quand on peut les compter
Ensemble vide	$\emptyset$	ne contenant aucun élément
Appartenance	$\in$ ou $\notin$	 x appartient à B → x est un élément de l'ensemble B $x \in B$ (x est un élément, B un ensemble)
inclusion	$\subset$ ou $\subseteq$	 A inclus dans B si tout élément de A appartient à B $A \subseteq B$ (A et B sont des ensembles)
Univers	Ω	Ensemble contenant tous les autres
Complémentaire	$C_\Omega A$ $\overline{A}$	 Complémentaire de A dans $\Omega = \Omega$ privé des éléments de A Plus simplement on peut noter $\overline{A}$ (non A) le complémentaire de A.
Réunion	U	 A union B ensemble des éléments de A ou de B Réunion de A et de B A U B
Intersection	$\cap$	 A inter B ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B . intersection de A et de B $A \cap B$
quel que soit	$\forall$	Quel que soit x , élément de A … Tout x , élément de A … $\forall$ x , $\in$ A
il existe	$\exists$ ou $\nexists$	Il existe x, élément de A tel que … $\exists$ x $\in$ A tel que ….
nécessaire	condition obligatoire, indispensable	
suffisant	condition minimale devant être vérifiée	
hypothèse	supposition, conjecture à vérifier ou admise comme vraie	
axiome	hypothèse de départ admise comme vraie sans qu'il soit possible de la démontrer	
proposition	P	un ensemble E ou un élément x vérifie une propriété P (x pair)
négation	non P $\overline{P}$	un ensemble $C_\Omega E$ ($\overline{E}$) ou un élément y ne vérifie pas la propriété P (y non pair)
propriété	Proposition vraie (les nombres dont le dernier chiffre est pair sont pairs)	
condition	proposition dont la vérification constitue un préalable à la vérification d'une autre proposition. si ………. alors … "Si f(x)=f(-x) alors le graphe de f(x) est symétrique par rapport à l'axe des y"	
Ou	P_1 ou P_2	 P_1 ou P_2 vraie si au moins une proposition est vérifiée. Ensemble vérifiant P1 ou P2 = réunion des ensembles
Et	P_1 et P_2	 P1 et P2 vraie si les deux propositions sont vraies. Ensemble vérifiant P1 et P2 = intersection des ensembles
implication	$P_1 \Longrightarrow P_2$	 P1 implique P2 P1 = "x est pair", P2 =" x^2 est pair", P1 ⇒ P2 vrai Posséder la propriété P1 implique posséder la propriété P2
Réciproque	$P_2 \Longrightarrow P_1$	La réciproque de $P_1 \Longrightarrow P_2$ est $P_2 \Longrightarrow P_1$. **x=2 ⇒x^2=4** vraie mais pas **x^2=4 ⇒ x=2.** Réciproque de si P1 alors P2 est si P2 alors P1. "si x^2 est pair alors x est pair".
équivalence	$P_1 \Leftrightarrow P_2$	 P1 implique P2 et P2 implique P1 donc P1 équivalente à P2. Les ensembles vérifiant les propriétés P1 et P2 sont les mêmes.
Contraposée	$\overline{P2} \Rightarrow \overline{P1}$	 Non P2 ⇒ Non P1 vrai équivalent à P1 ⇒ P2 vrai. Si P1 ⊂ P2 alors $C_\Omega P2 \subset C_\Omega P1$

Raisonnement déductif : suite d'implications "on a … donc ….."
Raisonnement par équivalence: transformation de l'énoncé d'un problème en énoncé plus simple équivalent. "4x+3=2x+9 équivalent à 2x = 6 équivalent à x = 3"
Raisonnement par l'absurde: On suppose la proposition fausse et on démontre que c'est impossible. "Si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ irréductible avec p et q entiers, en élevant cette égalité au carré, on démontre que p et q sont divisibles par 2, donc que la fonction peut être réduite. On en conclut que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel".
Raisonnement par disjonction de cas: On partitionne la population à étudier en 2 sous ensembles (par exemple entiers pairs, entiers impairs) et on démontre que la proposition est vraie dans chaque sous ensemble.
Raisonnement par contraposition: on démontre non B implique non A pour démontrer A implique B.
Raisonnement par contre exemple: pour démontrer qu'une proposition est fausse on donne un contre exemple. "f(x) = x^2 +2x -3 n'est pas positif pour tout x réel puisque f(0) = -3".

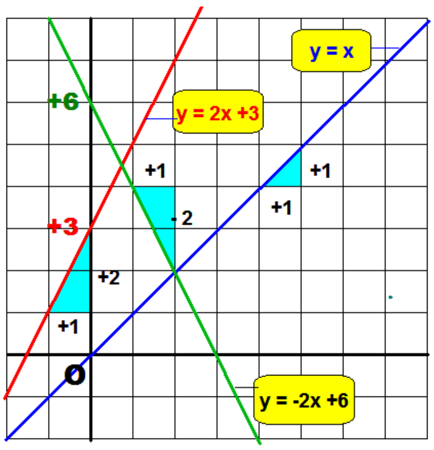
La droite

Dans ce qui suit le plan est rapporté à un repère orthonormé $O(\vec{i},\vec{j})$, a,b,c,m,p sont des nombres réels.



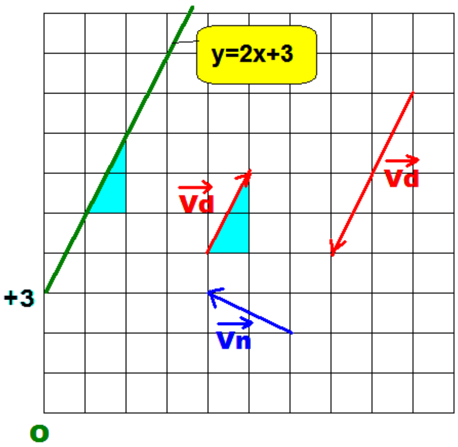
Toutes les droites du plan ont une équation. Par exemple …
y = 2x+2 fonction affine
y =- 2x fonction linéaire
y = -3 fonction constante
Mais toutes les droites ne sont pas le graphe d'une fonction.
C'est le cas des droites parallèles à l'axe des y (exemple x =3).
L'équation d'une droite peut revêtir 2 formes équivalentes
L'équation cartésienne ax+by+c=0 (par exemple 3x+5y-4=0)
L'équation réduite y = mx+p (par exemple y = 2x+3) qui est réservée aux droites représentant une fonction.
Si b n'est pas nul, il est facile de passer d'une équation cartésienne à une équation réduite et vice versa.
Pour une droite, il existe une infinité d'équations cartésiennes mais une seule équation réduite, aussi on considèrera que seule cette dernière permet d'identifier et de visualiser la droite sans ambigüité.

La droite y = 2x+3 est l'ensemble des points dont les coordonnées (x,y) sont liées par la relation y =2x +3.
Un point $P(X_P , Y_P)$ appartient à une droite si et seulement si l'équation de la droite est vérifiée quand $x=X_P$ et $y =Y_P$.
La phrase "le point P appartient à la droite d'équation y = ax+b" s'écrit "$Y_P =aX_P+b$" en vue de résoudre un problème.



Si on calcule le taux d'accroissement d'une droite d'équation
y = mx+p on trouve $\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{m(x+h)+p-(mx+p)}{h}$ et on constate qu'il est constant et égal à m alors que pour d'autres fonctions il dépend de x.
En d'autres termes, en tout point d'une droite,
si x augmente de 1, y varie de m
(comme le montrent les triangles bleus sur le dessin ci contre).
Autrement dit, **le vecteur (1, m) est parallèle à la droite**.
● **m est appelé coefficient directeur ou pente de la droite**
(Il nous indique de combien de carreaux la droite monte ou descend de gauche à droite quand x augmente de 1. En somme la direction de la droite).
● **p indique l'ordonnée du point de la droite qui est situé sur l'axe y'Oy, ce qui explique qu'on lui donne le nom d'ordonnée à l'origine.**

Pour tracer une droite y =mx+p, sachant qu'elle passe par le point (0,p) , il suffit, à partir de ce point d'augmenter x de 1 pendant que y augmente de m, on trouve ainsi un second point (1, p+m) et la droite passe par ces 2 points.



● **On appelle vecteur directeur $\overrightarrow{Vd}$ d'une droite y =mx +p tout vecteur parallèle à cette droite.** Il en existe une infinité ($k\overrightarrow{Vd}$ avec k réel non nul)
(1,m) est un vecteur directeur.
Inversement si $\overrightarrow{V_D}$(1,m) est // à une droite son coefficient directeur est m.
Si ax+by+c=0 est l'équation cartésienne d'une droite
$y=\frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$ est son équation réduite donc $(1,-\frac{a}{b})$ est un vecteur directeur et en multipliant par b → (b,-a) est un vecteur directeur.
● **On appelle vecteur normal d'une droite un vecteur $\overrightarrow{Vn}$ perpendiculaire à la droite.** Autrement dit le produit scalaire
$\overrightarrow{Vn}.\overrightarrow{Vd}$ = XnXd + YnYd doit être nul.
La droite y=mx+p admet (-m , 1) pour vecteur normal
La droite ax+by+c = 0 admet (a,b) pour vecteur normal.
Une droite admet une infinité de vecteur normaux ($k\overrightarrow{Vn}$ avec k réel non nul)

● **droite y=mx+p // droite y = m'x+p' équivalent à m = m' (même vecteur directeur)**
● **droite y =mx+p ⊥ droite y= m'x+p' équivalent à mm'= -1 (produit scalaire des vecteurs directeurs = 0)**
Soit A(Xa,Ya) un point connu du plan. Si M(x,y) est un point inconnu d'une droite (D) passant par A,
le vecteur $\overrightarrow{AM} = \vec{V}$ de coordonnées (x-Xa,y-Ya) formé à partir de 2 points de la droite est colinéaire à cette droite.
Si $\overrightarrow{Vd}$(Xd,Yd) est un vecteur directeur de la droite $\overrightarrow{Vd} // \vec{V}$ s'écrit **Xd(y-Ya) – Yd(x-Xa) = 0** (équation cartésienne de (D))
Si $\overrightarrow{Vn}$ (Xn,Yn) est un vecteur normal de la droite $\overrightarrow{Vn} \perp \vec{V}$ s'écrit **Xn(x-Xa) + Yn(y – Ya) =0** (équation cartésienne de (D))

Polynômes et expressions rationnelles

$5X^3 - 4X^2 + 7$ ou $3X^2 + 2X + 1$ sont des polynômes en X. (on peut remplacer **7** par **$7X^0$** et **1** par **X^0**)
Chaque terme de la forme **KX^P** est appelé **terme de degré P** et **K** est son **coefficient**.
Un polynôme en X est une somme de termes dans lesquels le degré de X varie de N à 0 (N **degré du polynôme**)
La valeur d'un polynôme est fonction de X. P : X → P(X), est appelée « **fonction polynôme** ».
On appelle **racines du polynôme** les solutions de P(X) = 0 (si elles existent).

Un polynôme de degré 2 revêt la forme générale **$P(X) = aX^2+bX+c$** avec le coefficient $a \neq 0$.
Toute équation de degré 2 peut (et doit) être ramenée à la forme P(X) = 0 avec P(X) polynôme de degré 2.
Toute inéquation de degré 2 peut être ramenée à la forme P(X) < 0 ou P(X)≤0 (étude du signe de P(X)).

Soit un polynôme de degré 2 **$P(X) = aX^2+bX+c$** **$\Delta = b^2 - 4ac$** est appelé **discriminant** de P.

Si **$\Delta > 0$** le polynôme a 2 racines **X_1** = $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et **X_2** = $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si **$\Delta = 0$** le polynôme a une racine unique dite racine double **X_1** = $\dfrac{-b}{2a}$ (faire Δ = 0 dans le cas précédent)

Si **$\Delta < 0$** le polynôme n'a pas de racine (par exemple $2X^2 + 3$ est toujours ≥ 3)

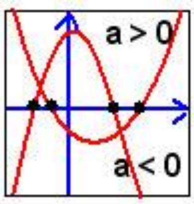
Lorsqu'il existe 2 racines leur somme **S**$= X_1 + X_2 = \dfrac{-b}{a}$, leur produit **P** $= X_1.X_2 = \dfrac{c}{a}$.

Si on détecte qu'à l'évidence $X_1 = 1$, on en déduit que X_2 = **P** =c/a et si à l'évidence $X_1 = -1$ alors $X_2 = -$ c/a
Si on divise $aX^2 + bX + c = 0$ par a, on obtient une équation X^2 –**S**X +**P**= 0 dont les racines sont les mêmes.
Si on connaît la somme **S** et le produit **P** de 2 nombres, ces 2 nombres sont racines de l'équation X^2 –**S**X +**P**= 0.

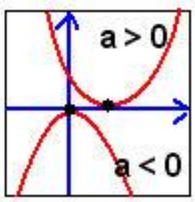
Un polynôme ayant 2 racines X_1 et X_2 est factorisable sous la forme **$a(X-X_1)(X-X_2)$** $3X^2+3X-6 = 3(X-1)(X+2)$
Un polynôme ayant une racine double X_1 est factorisable sous la forme **$a(X-X_1)^2$** $2X^2+4X+2 = 2(X+1)^2$
Un polynôme n'ayant pas de racine n'est pas factorisable $-X^2 - 1$ ne peut être factorisé.

Plus généralement si un polynôme de degré quelconque P(X) admet pour racine X_1, c'est-à-dire si $P(X_1)$ =0 alors P(X) peut être factorisé sous la forme $P(X) = (X-X_1)\,Q(X)$, Q(X) étant un polynôme dont le degré est inférieur de 1 à celui de P(X).
On obtient les coefficients de Q(X) par identification de ceux de P(X) et de $(X-X_1)\,Q(X)$.

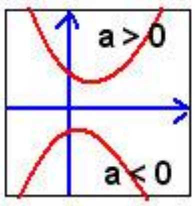
Etudier le signe d'un polynôme revient à résoudre une inéquation P(X) > 0 (ou P(X) <0).
Pour un polynôme de degré 2, il suffit de le factoriser et de comparer le signe des facteurs dans un tableau.
Le graphe de la fonction polynôme de degré 2 est une courbe appelée **parabole** dont l'illustration ci dessous montre l'apparence selon le nombre des racines et le signe du coefficient **a.** L'abscisse du sommet S de la parabole est le nombre X_S qui annule la dérivée de P(X). [$P'(X_S) = 0$]. Son ordonnée est $Y_S = P(X_S)$.
On voit très bien que le signe de P(X) ne varie que lorsque P(X) a 2 racines et dans ce cas P(X) est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de – a entre les racines.



2 racines



1 racine



0 racine

Une fraction rationnelle est un quotient de polynômes $R(X) = \dfrac{N(X)}{D(X)}$ par exemple $R(X) = \dfrac{2X^2 + 3X - 5}{X+3}$

La fonction R : X → R(X) est appelée **fonction rationnelle**.

R(X) n'est définie que si son dénominateur n'est pas nul. R(X) n'est pas définie pour X racine de D(X) . Pour étudier le signe de R(X) , il suffit de factoriser N(X) et D(X) et de comparer le signe de tous les facteurs dans un tableau.

Si N(X) et D(X) comportent un facteur commun, on n'a le droit de simplifier que si ce facteur n'est pas nul.

Valeurs absolues

Toute la difficulté des problèmes comportant des valeurs absolues est de respecter la définition de la valeur absolue qui est

$|f(x)| = f(x)$ si $f(x) \geq 0$ et **$|f(x)| = -f(x)$ si $f(x) \leq 0$**.

Notez qu'une valeur absolue a (en général) 2 déterminations possibles sans valeur absolue et que ces déterminations changent selon <u>le signe de f(x)</u> et non pas selon le signe de x. Mais <u>le signe de f(x)</u> varie, en général, en fonction de <u>la valeur de x</u>.

● **par exemple**

$|3X-15| = 3X-15$ (1ere détermination) si $3X-15 \geq 0$ c'est-à-dire si $3X \geq 15$ c'est-à-dire **si $X \geq 3$**

et donc **$|3X-15| = -3X+15$ (2^e détermination) si $X \leq 3$** .

ce que l'on peut exprimer dans un tableau montrant la détermination de $|3x-15|$ en fonction de la valeur de X.

● **Autre exemple** $|2X^2 + 6X - 8|$.

Les racines du polynôme du second degré sont +1 et –4. Son signe est positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur. Ce qui donne :

$|2X^2 + 6X - 8| = -2X^2 - 6X + 8$ si $x \in [-4 ; +1]$

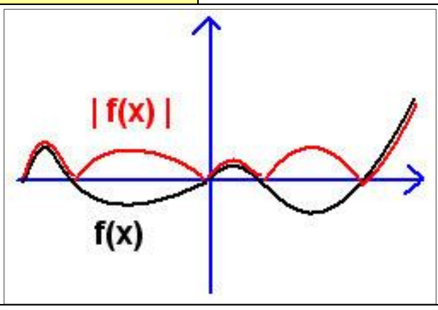
et **$|2X^2 + 6X - 8| = 2X^2 + 6X - 8$ si $X \in (-\infty , -4] \cup [+1 ; +\infty)$**

Et l'on peut encore utiliser un tableau pour montrer comment varie la détermination de la valeur absolue en fonction de la valeur de X.

Pourquoi utiliser un tableau pour illustrer cet aspect du problème ? .

Supposons que la question soit : résoudre **$|3X-15| = |2X^2 + 6X - 8|$.** Nous ne savons répondre à la question qu'après avoir fait disparaître la double barre qui symbolise les valeurs absolues et la nature de l'équation va changer selon la détermination des valeurs absolues, autant dire selon la valeur de X. Un tableau va nous permettre d'y voir plus clair. Appelons E notre équation.

valeur de X	$-\infty$ **- 4**	**1**	**3**	$+\infty$
$\|3X-15\|$	**$-3X + 15$**	**$-3X+15$**	**$-3X + 15$**	**$3X - 15$**
$\|2X^2 + 6X - 8\|$	**$2X^2 + 6X - 8$**	**$-2X^2 - 6X+8$**	**$2X^2 + 6X - 8$**	**$2X^2 + 6X - 8$**
E devient	$-3X+15= 2X^2 + 6X - 8$ **$2X^2+9X-23 = 0$**	$-3X+15=-2X^2- 6X+ 8$ **$2X^2+3X+7 = 0$**	$-3X+15= 2X^2 + 6X - 8$ **$2X^2+9X-23 = 0$**	$3X-15=2X^2 + 6X - 8$ **$2X^2+3X+7 = 0$**
Solutions	On calcule les solutions de E débarrassée des valeurs absolues colonne par colonne (si elles existent) et l'on ne retient que celles qui figurent dans le domaine de X où l'équation résultante est en vigueur. Par exemple, dans la colonne $(-\infty , -4]$ on ne retient que les solutions situées entre $-\infty$ et -4.			



Comparaison du graphe de f(x) (en noir) et de | f(x) | (en rouge).
Les parties négatives de f(x) sont « redressées » en – f(x) de sorte que le graphe de |f(x)| ne comporte pas de partie négative.
Si f(x) est toujours positive (par exemple si $f(x) = 3x^2+1$), les deux graphes coïncident.
Le graphe de $f(x)=|x|$ est formé de 2 demi droites formant un V dont la pointe occupe l'origine. La branche de droite correspond à $f(x)=x$ et celle de gauche à $f(x) = -x$. ($|x|= -x$ si $x \leq 0$)

● Remarquons que $g(x)=\sqrt{[f(x)]^2} = |f(x)|$ et non f(x) car g(x) existe même si f(x) est négative et en tant que racine g(x) est positive (ou nulle) par définition. Pour écrire g(x) = f(x), il faudrait que f(x) soit toujours positive et ce n'est peut être pas le cas. Ecrire $g(x)=|f(x)|$ couvre tous les cas de figures.

● Parfois on trouve des fonctions telles que $\frac{|x|}{x} f(x)$ le facteur de f(x) présente la particularité d'être égal à 1 si x > 0 et à –1 si x <0. Il n'est pas défini pour x = 0. le graphe de cette fonction est celui de f(x) pour x >0 et celui de –f(x) pour x <0. Avec un « trou » pour x = 0. Si, dans la fraction, on remplace x par x + k, on fait varier le domaine pour lequel la fonction est égale à f(x) ou –f(x).

Suites

2 définitions possibles pour les suites. Dans ce qui suit $n \in \mathbb{N}$

- terme général défini de façon explicite $U_n = f(n)$, par exemple $U_n=3n+7$ (calcul direct de tous les termes)
- mécanisme de construction défini par récurrence $U_{n+1}=f(U_n)$ par exemple $U_0=7$ et $U_{n+1}=3U_n + 4$.

- (U_n) **croissante** : tout n, $U_{n+1} > U_n$ ou $U_{n+1} - U_n > 0$ ● U_n **décroissante** tout n $U_{n+1} < U_n$ ou $U_{n+1} - U_n < 0$
- (U_n) **stationnaire** : $U_{n+1} = U_n$ ● (U_n) **alternée** $U_{n+1} / U_n < 0$ ● (U_n) **périodique** $\exists P$ tel que $U_{n+P} = U_n$
- (U_n) **minorée** $\exists m$ tel que tout n $U_n \geq m$ ● (U_n) **majorée** $\exists M$ tel que tout n $U_n \leq M$
- (U_n) **bornée** : U_n majorée et minorée ● (U_n) **monotone** si un seul sens de variation ou stationnaire.
- (Un) et (Vn) **adjacentes** si leurs sens de variation sont différents et $U_n - V_n \to 0$ quand $n \to \infty$

(U_n) **convergente** si U_n tend vers une limite finie L quand $n \to \infty$

● **lim U_n = L si quelque soit $\varepsilon > 0$ et aussi petit que l'on veut l'inéquation $|U_n - L| < \varepsilon$ admet une solution de type n>N (N étant un rang fonction de ε).** Il existe d'autres définitions équivalentes de la convergence. Ci-dessous des familles de **suites de références** que l'on sait convergentes de limite 0 :

● $U_n = n^{-k}$ (avec k > 0) Par exemple $1/n^2$ ou $1/\sqrt{n}$ ● $U_n = k^{-n}$ avec k >1 (par exemple $1/2^n$) ou $U_n=K^n$ ($-1 < k < 1$)

- Si Un est croissante et majorée ou décroissante et minorée, alors Un converge.
- Si Un = f(n) et que f(x) admet une limite L quand $x \to +\infty$, alors Un a pour limite L
- Si Vn converge vers 0 et à partir d'une certain rang $|U_n| < K|V_n|$ (avec K > 0) alors Un converge vers 0.
- Un converge si elle est la somme, ou le produit 2 suites convergentes.
- Si V_n et W_n sont 2 suites convergentes vers L et que pour n>N on a $V_n \leq U_n \leq W_n$ alors lim U_n= L

Exemple $U_n = 2n^2 / (n^3 + 1) < 2n^2 / n^3$ donc $0 < U_n < 2(1/n)$ et Un converge vers 0.

(U_n) **divergente** si elle ne converge pas. En particulier une suite telle que lim $(U_n) = \pm\infty$ diverge. C'est la cas des **suites de référence** suivantes :

● $U_n = n^k$ avec k > 0 (par exemple **n**, $\mathbf{n^2}$ ou $\sqrt{n}$) ● $U_n = k^n$ avec k > 1 (par exemple 2^n)

Une suite peut être bornée et divergente (exemple cos (n)).

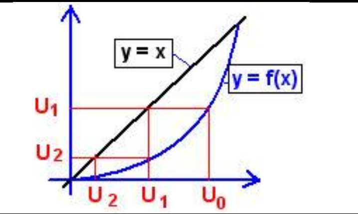
● **Une suite tend vers $+\infty$ si tout A>0 (A aussi grand que l'on veut), l'inéquation Un > A a une solution de type n>N avec N fonction de A.**

● **Une suite tend vers $-\infty$ si tout A<0 (A aussi petit que l'on veut), l'inéquation Un < A a une solution de type n>N avec N fonction de A.**

- si $U_n = f(n)$ et si quand $x \to \infty$ lim f(x)= ∞ alors lim $U_n = \infty$
- On peut aussi démontrer que lim $U_n = \infty$ en la comparant à une suite de référence.

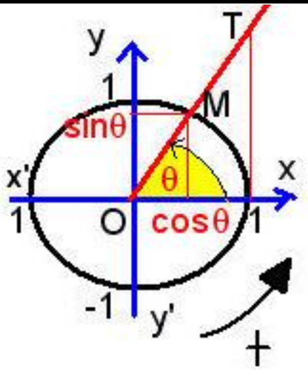
par exemple $2^n = (1+1)^n = 1+n +....$ (début du développement binôme de newton) et n a pour limite ∞.

Suite arithmétique	Suite géométrique
définition : $\mathbf{U_{n+1}=U_n + R}$ (**R** appelé **raison**)	définition : $\mathbf{U_{n+1} = U_n.Q}$ (**Q** appelé **raison)**
terme général : $\mathbf{U_n = U_0 + nR}$	terme général : $\mathbf{U_n = U_0.Q^n}$
lien entre rang **n** et rang **p** : $\mathbf{U_n = U_p + (n-p)R}$	lien entre rang **n** et rang p : $\mathbf{U_n = U_p.Q^{n-p}}$
somme partielle des n premiers termes $\mathbf{S_n = U_0+U_2+...+U_{n-1}} = \dfrac{n(U_0 + U_{n-1})}{2}$	somme partielle des n premiers termes $\mathbf{Sn=U_0+U_1+...+U_{n-1}} = U_0 \dfrac{Q^n - 1}{Q - 1}$
$\mathbf{1+2+3+.....+n} = \dfrac{n(n+1)}{2}$	factorisation de $1-x^n$ pour $x \neq 1$ $\mathbf{1+x+x^2+...+x^{n-1}} = \dfrac{1 - X^n}{1 - X}$
relation 3 termes consécutifs $\mathbf{2U_{n+1} = U_n + U_{n+2}}$	relation 3 termes consécutifs $\mathbf{(U_{n+1})^2 = (U_n)(U_{n+2})}$
toujours divergente	converge vers **0** si **|Q|<1** . diverge si **|Q|>1**.



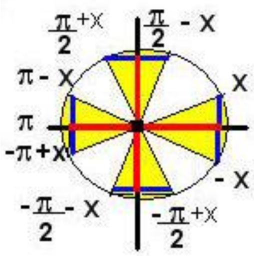
interprétation graphique : les suites définies par une récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$.
(ici $U_{n+1}=(U_n)^2$ donc $f(x)=x^2$) On trace le graphe de f(x) et le graphe de la droite y = x.
On part de $x=U_0$ (ici $U_0 = 0{,}8$), grâce à la courbe on cherche le point $U_1 = f(U_0)$ sur l'axe des y, puis grâce à la droite y = x on situe le point $x = U_1$ sur l'axe des x.
Et on recommence le processus, on cherche $U_2 = f(U_1)$ grâce à la courbe puis, grâce à la droite le point $x = U_2$. Et ainsi de suite. Ici il semble que U_n converge vers 0.

Fonctions circulaires sin(x) et cos(x)



Un repère orthonormé (O,i,j) .Les axes x'Ox et y'Oy. Le cercle de centre O et de rayon 1.
La longueur de la circonférence d'un cercle de rayon 1 est 2π. L'angle (Ox , OM) intercepte un arc de longueur proportionnelle à sa mesure θ. (θR dans le cas général, ici θ puisque R=1)
On définit la mesure de cet angle en **radians**, comme la longueur de l'arc qu'il intercepte.
Si on décrit les angles dans le sens positif conventionnel on a donc les mesures suivantes : (Ox , Oy) = π/2 , (Ox , Ox') = π, (Ox,Oy') = 3π/2, (Ox ,Ox) = 0 ou 2π. Mais on peut aussi décrire les angles dans le sens négatif et on a (Ox, OM) = θ ou –2π + θ selon le sens choisi..
On peut aussi faire plusieurs tours du cercle avant de s'arrêter en M et on a (Ox, OM) = θ ou θ + 2kπ. Pour éviter ces ambiguïtés, on définit la **mesure principale** d'un angle comme sa valeur située entre –π et +π.
Cet angle correspond au plus petit arc reliant (1,0) à M.

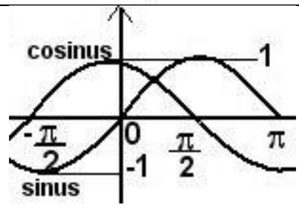
Autre remarque importante, si (Ox ,OM) = x , les coordonnées de M dans le repère orthonormé de centre O sont M (cos x , sin x) , on peut lire directement les valeurs de ces lignes trigonométriques en projetant le point M sur les axes. En outre, si la tangente au cercle en (1, 0) coupe la droite OM en T, l'ordonnée de T est tan (x) .
On découvre que selon le quadrant où se trouve M, sinus (x), cosinus(x) ou tangente(x) peuvent être positifs ou négatifs.
Le sinus et le cosinus varient entre –1 et +1 , la tangente entre –∞ et +∞ .



lignes trigonométriques déduites de celles de x :

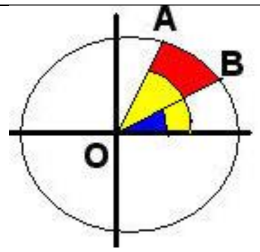
En bleu :
sin (x) = cos (π/2 –x) = – cos (π/2 +x) = sin (π –x)= –sin(–π+x)= –cos(–π/2 –x) etc …

En rouge :
cos (x)=cos(–x) = sin(π/2–x)=sin(π/2 +x) = –cos(π–x) = –cos(–π+x) = –sin(–π/2–x) etc…



fonctions sinus(x) et cosinus (x).
L'angle (Ox,Om)=x peut prendre toutes les valeurs de - ∞ à +∞ selon le sens choisi.
Ces fonctions sont définies sur R, continues, dérivables, périodiques de période 2π
[f(x) = f(x+2π)], à valeurs dans l'intervalle [–1 ; +1]. Cos (x) est paire et sin (x) impaire.
Le graphe de sin(x) passe par l'origine, le graphe de cos(x) passe par (0,1) il est obtenu à partir de celui de sin (x) par une translation de vecteur (–π/2 , 0) .

La dérivée de **sin(x)** est **cos (x),** la dérivée de **cos(x)** est **–sin(x)** (observez qu'elle est négative sur [0,π])
De "dérivée de sin(x) pour x =0 est cos(0) =1" on déduit que $\lim_{h\to 0} \frac{\text{Sin}(h)}{h} = 1$ (définition du nombre dérivé pour x =0)



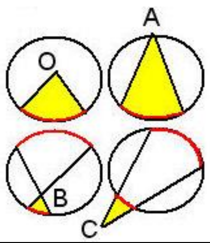
(**formules d'addition**) . En jaune l'angle a , en bleu l'angle b, en rouge l'angle a – b.

Ecrivons le produit scalaire $\vec{OA} * \vec{OB}$ = 1x1xcos(a–b)= cos(a-b)= cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)
Puis en remplaçant b par – b cos (a + b) = cos(a) cos (b) – sin(a)sin(b)
En remplaçant a par π/2– a sin (a – b) = sin(a) cos(b) – cos(a) sin (b)
En remplaçant b par – b sin (a + b) = sin(a) cos(b) + cos(a)sin(b)
En remplaçant b par a Sin (2a) = 2 sin(a)cos(a) et $\cos(2a)=\cos^2(a)–\sin^2(a)$

En écrivant tan(a+b) = sin(a+b)/cos(a+b) puis en divisant numérateur et dénominateur par cos(a)cos(b) on trouve

$$\tan(a+b)= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

n'oublions pas la relation fondamentale $\boxed{\text{Sin}^2x + \cos^2x = 1}$
et en divisant par $\cos^2x$ $\tan^2x = (1/\cos^2x) – 1$

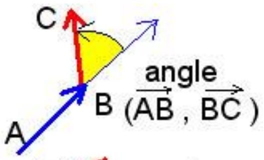


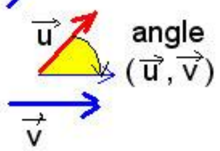
Angles au centre, inscrits, externes, internes.
En outre il faut savoir que dans un cercle
L'angle **au centre O** de mesure θ intercepte un arc de mesure θR
L'angle **inscrit A** mesure la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc (en rouge)
Dans les 2 dessins qui suivent , si les angles au centre qui interceptent les 2 arcs rouges mesurent θ et μ,(avec θ > μ) **l'angle interne B** mesure $\frac{\theta+\mu}{2}$ et **l'angle externe C** mesure $\frac{\theta-\mu}{2}$.

GEOMETRIE

Produit scalaire
Quelques résultats à connaitre en géométrie analytique
Coordonnées polaires (pas au programme) et équation d'un cercle

Produit scalaire





angle de 2 vecteurs

Comme l'indique la figure 1, pour visualiser l'angle de 2 vecteurs, il faut translater l'un d'eux, le faire glisser parallèlement à sa position initiale, jusqu'à ce que les 2 vecteurs aient une <u>origine commune</u>. Ensuite, l'angle des 2 vecteurs est l'angle duquel il faut faire tourner le 1er (comme l'aiguille d'une montre) jusqu'à ce qu'il se superpose au 2e. Cet angle peut être positif ou négatif en fonction de l'orientation choisie dans le plan. On peut vérifier que :

☐ (u,v) + (v,w) = (u, w) (Chasles) ☐ (u,v) = – (v,u) ☐ (–u,v)=(u,–v)=(u,v) – π

☐ (u,v) = (–u, – v) ☐ (u,u) = 0 ☐ (u, –u) =π ☐ (λu, ϒv) = soit (u,v) soit (u,v) – π

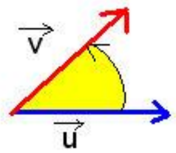
Produit scalaire (figures 2, 3, 4)

Définition 1 **$\vec{U}\bullet\vec{V} = ||\vec{U}||.||\vec{V}||.\cos(\vec{U},\vec{V})$**

Définition 2 Si $\vec{V_P}$ est la projection orthogonale de $\vec{V}$ sur axe O, $\vec{U}$ **$\vec{U}\bullet\vec{V} = \pm ||\vec{U}||.||\vec{V_P}||$**

Définition 3 Si $\vec{U}$ a pour coordonnées (X,Y) et $\vec{V}$ (X', Y') **$\vec{U}\bullet\vec{V}$ = XX' + YY'**

Définition 4 Dans un triangle ABC **$\vec{AB}\bullet\vec{AC} = 1/2(AB^2 + AC^2 - BC^2)$** tiré de $BC^2=(\vec{BA}+\vec{AC})^2$



Propriétés du produit scalaire

$\vec{U}\bullet\vec{V} > 0$ si **$|(\vec{U},\vec{V})| < \pi/2$** **$\vec{U}\bullet\vec{V} < 0$** si **$|(\vec{U},\vec{V})| > \pi/2$** **$\vec{U}\bullet\vec{V} = 0$** si **$|(\vec{U},\vec{V})| = \pm\pi/2$**

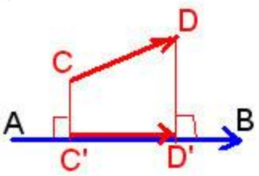
Commutativité du produit scalaire **$\vec{U}\bullet\vec{V} = \vec{V}\bullet\vec{U}$** (car cos θ = cos – θ)

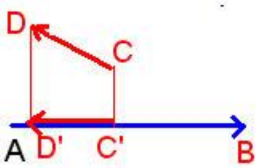
Linéarité du produit scalaire **$\vec{U}\bullet(\vec{V} + W) = \vec{U}\bullet\vec{V} + \vec{U}\bullet W$**

si K réel **$\vec{U}\bullet K\vec{V} = k(\vec{U}\bullet\vec{V})$**

Carré scalaire = carré des normes **$\vec{U}\bullet\vec{U} = ||\vec{U}||^2$** autrement dit **$(\vec{AB})^2 = AB^2$**

Il en résulte que les produits scalaires $(\vec{U}+\vec{V})^2$, $(\vec{U}-\vec{V})^2$ et $(\vec{U}+\vec{V})(\vec{U}-\vec{V})$ sont homogènes aux identités remarquables.





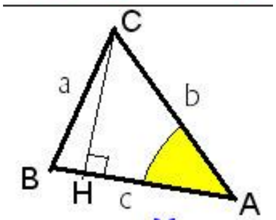
Relations métriques dans un triangle quelconque (figure 4)

On appelle a (respectivement b, c) la longueur du côté opposé à l'angle A (respectivement B , C) .On a

☐ **$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$** (**Al Kashi**) tiré de $(\vec{BC})^2 = (\vec{BA} + \vec{AC})^2$

☐ **aire (ABC) = ½ bc sin A** tiré de h = b sin A

☐ **a/sin A = b / sin B = c / sin** tiré des 3 expressions possible de l'aire de ABC



Formules d'addition de la trigonométrie

Dans un repère orthonormé (O, i , j) on trace le cercle de centre O et de rayon 1. Sur ce cercle on prend 2 points A et B tels angle (Ox, OA)= a et (Ox, OB)= b. Les coordonnées des vecteurs sont $\vec{OA}$(cos a , sin a) et $\vec{OB}$ (cos b, sin b).

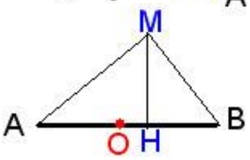
Par définition le produit scalaire de ces 2 vecteurs de norme 1 est égal à

1 **cos (a–b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)**.

D'où on tire toutes les formules d'addition de la trigonométrie

Si on veut démontrer que **2 vecteurs** $\vec{U}$ (X, Y) et V(X',Y') **sont orthogonaux** :

XX' + YY' = 0 ($\vec{U}\bullet\vec{V}$ = 0)



Soit M (x, y) un point de la droite passant par A et perpendiculaire au vecteur V(p,q). Il suffit d'écrire que le produit scalaire $\vec{AM}\bullet\vec{V}$ est nul pour avoir **l'équation cartésienne de la droite** **$(x-X_A)p+(y-Y_A)q = 0$**.

Relations déduites du produit scalaire (figure 4)

On utilise les relations suivantes : **$\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{BA}$ et $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MO}$**

(avec O milieu de AB, ce qui fait de MO la moitié de la diagonale du parallélogramme somme des vecteurs $\vec{MA} + \vec{MB}$)

Ensuite, en utilisant les identités remarquables, il est facile de démontrer les relations suivantes :

$MA^2-MB^2 = 2\vec{MO}\bullet\vec{BA}$. [car $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$] = ± 2OH.BA (définition 2)

$\vec{MA}\bullet\vec{MB}$= 1/4 [$(2MO)^2-(BA)^2$] car 4ab = $(a+b)^2 - (a-b)^2$

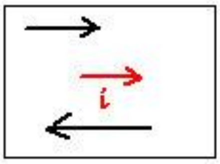
MA^2+MB^2= 1/2 [$(2MO)^2+(BA)^2$] car 2($a^2 + b^2$) = $(a+b)^2 + (a-b)^2$

La dernière égalité **$MA^2+MB^2= 2MO^2+ \frac{1}{2}BA^2$** Porte le nom de "**Théorème de la médiane**"

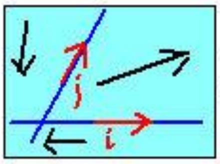
Si A et B sont des points fixes, on peut déduire des ces relations le lieu du point M tel que le membre de gauche des ces égalités soit constant. f(M)=k.

Quelques résultats importants en géométrie analytique

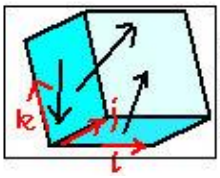
Dans ce qui suit $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{V}$, $\vec{V}'$ sont des vecteurs, X, Y, Z sont des coordonnées de vecteurs, X_A, Y_B des coordonnées de points, x, y, z des variables, λ, α des nombres réels.



droite vectorielle



plan vectoriel



espace vectoriel de dimension 3

● **Droite vectorielle** : Ensemble de vecteurs colinéaires à l'un d'entre eux. **Dimension 1**. **Base** $\{\vec{i}\}$. Tout vecteur d'une droite vectorielle peut s'écrire sous la forme $X\vec{i}$ avec X nombre réel quelconque.

● **Plan vectoriel** : Ensemble de vecteurs coplanaires à 2 d'entre eux. **Dimension 2**. **Base** $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ ($\vec{i}$, $\vec{j}$ non colinéaires). Tout vecteur peut s'écrire sous la forme $X\vec{i} + Y\vec{j}$ avec X et Y nombres réels appelés coordonnées dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Dans un plan vectoriel, tout ensemble de 2 vecteurs non colinéaires en constitue une base.

● **Espace vectoriel** de **dimension 3**. **Base** $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ (chacun de ces vecteurs n'appartenant pas au plan des 2 autres). Tout vecteur peut s'écrire sous la forme $X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ (X, Y, Z sont les coordonnées dans la base choisie). Dans un espace vectoriel de dimension 3, tout ensemble de 3 vecteurs dont l'un n'appartient pas au plan des 2 autres en constitue une base.

Dans un espace vectoriel de dimension 2 rapporté à la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, chaque vecteur a des coordonnées uniques (X,Y). Ne pas oublier que $\vec{V}$ a pour coordonnées (X,Y) s'écrit $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}$

Le sous espace des vecteurs pour lesquels on a (par exemple) X = 0 est la droite vectorielle de base $\{\vec{j}\}$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs que l'on peut écrire sous la forme $Y\vec{j}$, Y étant un réel quelconque.

Repère quelconque	**$(O, \vec{i}, \vec{j})$**	**$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$**
Coordonnées d'un point M	X_M, Y_M tels que $\vec{OM} = X_M\vec{i} + Y_M\vec{j}$	X_M, Y_M, Z_M tels que $\vec{OM} = X_M\vec{i} + Y_M\vec{j} + Z_M\vec{k}$
Coordonnées d'un vecteur $\vec{AB}$	$X_B - X_A$, $Y_B - Y_A$	$X_B - X_A$, $Y_B - Y_A$, $Z_B - Z_A$
Somme $\vec{V} + \vec{V}'$	X + X', Y + Y'	X + X', Y + Y', Z + Z'
λ fois vecteur $\vec{V}$	λ X, λ Y	λ X, λY, λ Z
Milieu de AB	$\frac{X_A + X_B}{2}, \frac{Y_A + Y_B}{2}$	$\frac{X_A + X_B}{2}, \frac{Y_A + Y_B}{2}, \frac{Z_A + Z_B}{2}$
Barycentre G de $A_1,..,A_n$ (Y_G, Z_G homogènes à X_G)	$X_G = \frac{\alpha_1 X_{A_1} + ... + \alpha_n X_{A_n}}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}$	$X_G = \frac{\alpha_1 X_{A_1} + ... + \alpha_n X_{A_n}}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}$
Test $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ colinéaires	$\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'}$ ou XY' – X'Y = 0	$\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'}$
équation droite(AM) // $\vec{V}$	$(X_A - x)Y - (Y_A - y)X = 0$	Ensemble des points (x, y, z) avec $x = X_A + \lambda X$, $y = Y_A + \lambda Y$, $z = Z_A + \lambda Z$
Repère orthonormé	**$(O, \vec{i}, \vec{j})$**	**$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$**
Norme de $\vec{V}$	$\sqrt{X^2 + Y^2}$	$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$
produit scalaire $\vec{V} \bullet \vec{V}'$	X X' + Y Y'	X X' + Y Y' + Z Z'
test $\vec{V} \perp \vec{V}'$	X X' + Y Y' = 0	X X' + Y Y' + Z Z' = 0
équation droite ou d'un plan passant par un point A et $\perp \vec{V}$	$(X_A - x)X + (Y_A - y)Y = 0$ droite passant par A $\perp \vec{V}$	$(X_A - x)X + (Y_A - y)Y + (Z_A - z)Z = 0$ Plan passant par A $\perp \vec{V}$

à retenir : $\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{BA}$ et $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MO}$ avec O milieu de AB (MO demie diagonale du parallélogramme somme)

Pour démontrer que 3 points A, B, C sont alignés démontrer que 2 des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$ sont colinéaires.

Pour démontrer que M est le milieu de AB utiliser la définition analytique ou démontrer que $\vec{AB} = 2\vec{AM}$

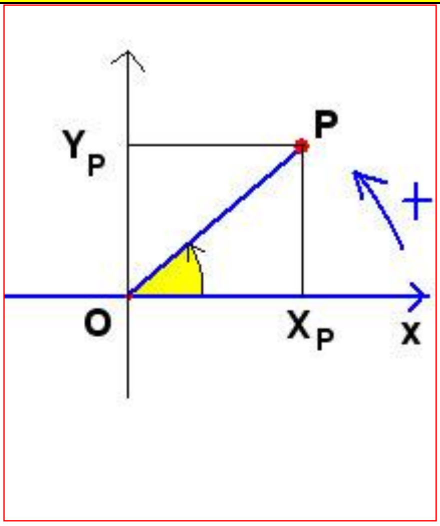
Pour démontrer T(ABC) rectangle en A démontrer $\vec{AB} \bullet \vec{AC} = 0$ (ou Pythagore)

Pour démontrer T(ABC) isocèle démontrer $||\vec{AB}|| = ||\vec{AC}||$

Pour démontrer (AB) // (CD) démontrer $\vec{AB} = k\vec{CD}$ ou coordonnées de $\vec{AB}$ proportionnelles à celles de $\vec{CD}$ (XY' –X'Y =0)

Coordonnées polaires

(Pas au programme)



Pour localiser un point P dans le plan, on peut imaginer un autre système que les coordonnées cartésiennes (X_P,Y_P). Il suffit d'un **axe Ox** (**axe polaire**, **le pôle étant O**) et après avoir choisi un sens de mesure positif pour les angles (par convention on prend le sens trigonométrique), pour localiser un point **P**, il suffit de connaître la mesure principale de l'angle (Ox, OP) qui est un nombre noté **θ** (**appelé azimut ou angle polaire**) et compris entre –π et + π. et la **longueur OP** que l'on note **R** ou **ρ** (rhô) et que l'on appelle **rayon**.

Dans ce système les coordonnées de P sont notées (ρ , θ) et appelées « coordonnées polaires ».
Le repère polaire est Ox (point O et axe orienté)

On obtient un repère cartésien par ajout d'un axe Oy tel que (Ox , Oy) = +π/2

● **Pour passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes** :

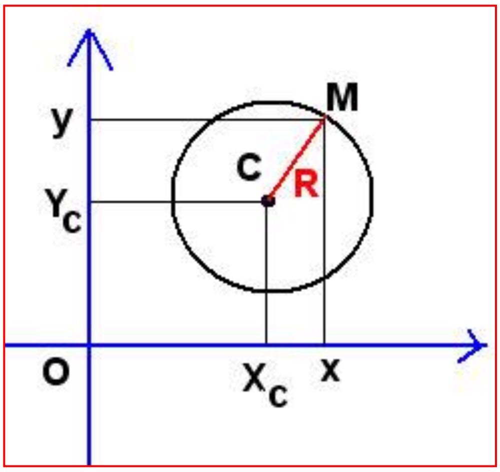
$$X_P = \rho \cos \theta \qquad\qquad Y_P = \rho \sin \theta$$

● **Pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires**

$$\rho = \sqrt{X_P^2 + Y_P^2} \qquad \cos \theta = \frac{X_P}{\sqrt{X_P^2 + Y_P^2}} \qquad \sin \theta = \frac{Y_P}{\sqrt{X_P^2 + Y_P^2}}$$

Equation d'un cercle en coordonnées cartésiennes

Repère orthonormé (obligatoire quand veut exprimer analytiquement des longueurs)



un cercle est caractérisé par la connaissance de son centre C de coordonnées (X_c,Y_c) et de son rayon R.
Dans l'équation d'un cercle x et y sont les coordonnées d'un point M quelconque appartenant au cercle.
Pour avoir l'équation du cercle, il suffit d'écrire que CM = R.
Pour éviter les racines carrées on écrit plutôt $CM^2 = R^2$ ce qui donne :

$$\mathbf{(X_c - x)^2 + (Y_c - y)^2 = R^2}$$

ou encore en développant

$$\mathbf{x^2 + y^2 - 2(X_c)x - 2(Y_c)y + (X_c)^2 + (Y_c)^2 = R^2}$$

X_c , Y_c et R étant des nombres réels quelconques

Pour savoir si $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ (ou toute équation qui peut être ramenée à cette forme) est l'équation d'un cercle
1) il faut a = b et après avoir divisé l'équation par a il reste $x^2+y^2-2Cx-2Dy+E = 0$
2) il reste à vérifier que $C^2 + D^2 - E$ est positif cette quantité devant être égale à R^2.
3) si tout est conforme, l'équation est bien celle d'un cercle dont les coordonnées du centre sont (C, D) et le rayon R.
Exemple $3x^2+3y^2- 6x + 12y -12 = 0$ donne $x^2+y^2- 2x + 4y -4 = 0$ après division par 3.
Si c'est l'équation d'un cercle on devrait avoir Xc = 1 et Yc = –2. (coordonnées du centre)
test : $(Xc)^2 + (Yc)^2 - E = 1 + 4 + 4 = 9$. Ce nombre est positif c'est R^2.
$3x^2+3y^2- 6x + 12y -12 = 0$ est donc bien l'équation d'un cercle de centre (1 ; –2) et de rayon 3.
Attention ! si Xc (ou Yc) est nul, cela se traduit par la disparition du terme en x (en y).

Fonctions

Introduction à la notion de limite d'une suite ou d'une fonction.
Dérivées
Plan d'étude d'une fonction
Quelques fonctions basiques
Les fonctions de type $f(x) = x^n$

Limites

On se propose d'étudier les limites d'une expression banale contenant une variable x et au moins une constante K quand x prend des valeurs singulières.
Pour étudier ces limites…

Quand x $\rightarrow \pm\infty$ **Quand la valeur absolue de x grandit indéfiniment (x tend vers + l'infini ou – l'infini)**

Il suffit de remplacer K par 1 et x successivement par 10, 100, 1000, 1000000 pour voir comment évolue l'expression.

● Les valeurs absolues de Kx , $K\sqrt{|x|}$, Kx^2, $(Kx)^3$, … etc deviennent très grandes sans limite supérieure.

Autrement dit, on peut choisir L positif aussi grand qu'on veut, on trouvera toujours un nombre positif r tel que pour tout x plus grand que r la valeur absolue de notre expression soit plus grande que L. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

● Quant aux valeurs absolues de $\frac{K}{x}$, $\frac{K}{\sqrt{|x|}}$, $\frac{K}{x^2}$, $\frac{K}{x^3}$ quand x devient très grand, elles deviennent très petites et tendent vers 0.

Autrement dit, on peut choisir L positif aussi petit que l'on veut, il existera toujours un nombre positif r tel que pour tout x plus grand que r , la valeur absolue de notre expression soit plus petite que L. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

Quand x $\rightarrow$ 0 **Quand la valeur absolue de x devient infiniment petite (X tend vers 0).**

Il suffit de remplacer K par 1 et x successivement par $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \dots, \frac{1}{1000000}$ pour voir comment évolue l'expression.

● Les valeurs absolues de Kx , $K\sqrt{|x|}$, Kx^2, $(Kx)^3$, … etc tendent toutes vers 0. $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

● Tandis que les valeurs absolues de $\frac{K}{x}$, $\frac{K}{\sqrt{|x|}}$, $\frac{K}{x^2}$, $\frac{K}{x^3}$ deviennent très grandes sans limite. $\left(\frac{a}{\frac{1}{n}} = an\right)$

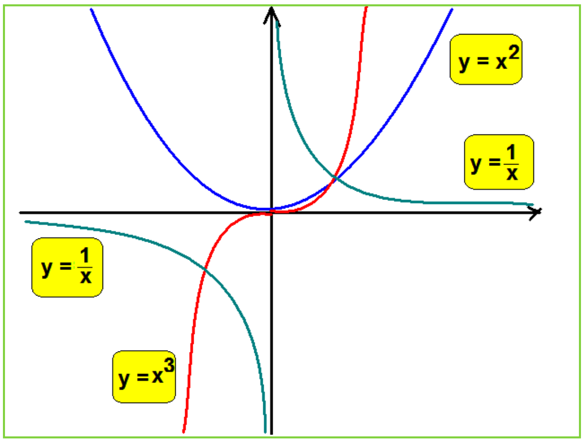
Autrement dit, on peut choisir L positif aussi grand qu'on veut, on trouvera toujours un nombre positif r tel que pour tout x appartenant à l'intervalle]-r , r] la valeur absolue de notre expression soit plus grande que L. $\lim_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$

On peut étudier la limite d'une expression f(x) qui peut être par exemple une fonction (si f(x) définie sur un domaine de R) ou une suite (si x $\in$ N) dans 2 cas de figures

1) limite quand x devient infini on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
2) limite quand x tend vers une valeur finie A. Dans ce cas on peut être amené à dissocier 2 cas
   Quand x tend vers A en restant inférieur à A qu'on note A^- par exemple $\lim_{x\to A^-} f(x) = L$
   Quand x tend vers A en restant supérieur à A qu'on note A^+ par exemple $\lim_{x\to A^+} f(x) = -\infty$

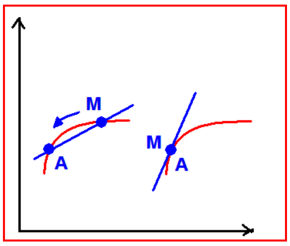
Si ces deux limites sont différentes on parle de limite à gauche ou de limite à droite quand x $\rightarrow$A.
Si ces deux limites sont égales on parle de limite quand x $\rightarrow$ A.

On peut prédire le comportement aux limites de certaines fonctions de x quand x devient infini ou tend vers 0.



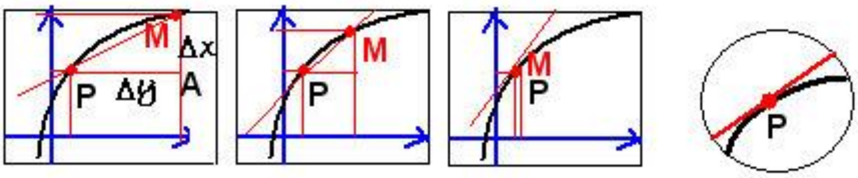
f(x)	x→+ ∞	x→-∞	x→0⁻	x→0⁺
x^2	f(x)→+∞	f(x)→+∞	f(x)=0	f(x)=0
x^3	f(x)→+∞	f(x)→ -∞	f(x)=0	f(x)=0
$\frac{1}{x}$	f(x)→0^+	f(x)→0^-	f(x)→ - ∞	f(x)→ +∞
$\frac{1}{x^2}$	f(x)→0^+	f(x)→0^+	f(x)→+∞	f(x)→+∞

Une limite finie peut être notée B^+ ou B^- selon que f(x) reste supérieur ou inférieur à sa valeur limite.
Essayez de voir comment les graphes ci- contre traduisent les résultats (déduits du calcul) qui se trouvent dans ce tableau.



On tutoie aussi la notion de limite quand on définit le nombre dérivée.
Sur le dessin ci contre le coefficient directeur de la sécante AM est
a = $\frac{Y_M - Y_A}{X_M - X_A}$ ou encore si on pose $X_M = X_A + h$, a = $\frac{f(X_A+h)-f(X_A)}{h}$
Lorsque M tend vers A autrement dit lorsque h $\rightarrow$0, a $\rightarrow \frac{0}{0}$ qui est une forme indéterminée mais comme la position limite de la sécante est la tangente en A au graphe de f, cette limite doit être le coefficient directeur de la tangente un nombre que l'on note f ' (X_A) et que l'on appelle nombre dérivée de f pour x = X_A.

Dérivées



Nombre dérivé : soit un point P (X_P, Y_P) appartenant au graphe d'une fonction f(x). On note **f '(X_P)** le nombre dérivé de la fonction f en P (ou en X_P). On le définit de 3 façons possibles :

1 $f'(X_P) = \lim_{x \to X_p} \frac{f(x) - f(X_p)}{x - X_p}$ **2** $f'(X_P) = \lim_{h \to 0} \frac{f(X_p + h) - f(X_p)}{h}$ **3** $f'(X_P) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

1 → 2, il suffit de poser $x = X_P + h$ **1→ 3** il suffit de poser $f(x) - f(X_P) = \Delta y$ (ou Δf) et $x - X_P = h = \Delta x$.
inverser X_P et x dans les formules ne change rien. Si on considère que x et y sont les coordonnées d'un point M différent de P, le rapport $\Delta y / \Delta x$ dont on cherche la limite est en fait le coefficient directeur de la droite PM, et on cherche sa limite quand M tend vers P. C'est-à-dire quand la sécante PM tend vers la tangente au graphe en P. Il est donc logique de considérer que si le nombre dérivé de f en P existe, il est tout bonnement égal au coefficient directeur de la tangente au graphe de f en P.

● **Soit y = ax + b équation de la tangente au graphe de f en P(X_P, f(X_P)) alors a = f ' (X_P).**

Dérivabilité : une fonction est dérivable en tout point de son domaine de définition où le nombre dérivé existe, c'est-à-dire en tout point où la limite de $\Delta f / \Delta x$ quand Δx tend vers 0 existe et prend une valeur finie. Le graphe doit être continu, ne pas présenter de brisure ou de cassure, ne pas avoir de tangente parallèle à l'axe des y.

Fonction dérivée de f : c'est la fonction qui à tout x du domaine où f est dérivable, fait correspondre le nombre dérivé f '(x). $f' : x \to f'(x)$.
Si on connaît la fonction dérivée f' (x), il suffit de donner la valeur X_P à x , f ' (X_P), pour avoir le nombre dérivé en X_P

Opérations sur les dérivées **u, v** sont des fonctions, **u', v'** leur dérivée, **k** un nombre réel)

● $(ku)' = ku'$ ● $(u + v)' = u' + v'$ ● $(uv)' = u'v + uv'$ ● $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Formule fondamentale : **la dérivée de X^n est $n X^{n-1}$** (avec n entier relatif)

Dérivées à connaître :

● dérivée d'une constante **(k) ' = 0** ● dérivée d'un terme de polynôme **$(aX^n)' = naX^{n-1}$**

● dérivée de l'inverse d'une puissance de x $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}}$ ● dérivée de la fonction racine $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Toutes ces dérivées sont déduites de la formule fondamentale

Autres dérivées usuelles

● dérivée de sin x : **(sin x)' = cos x** ● dérivée de cos x **(cos x) ' = – sin x**

Une technique très utile

Une fonction composée est une fonction dans laquelle on a remplacé x par une fonction de x [u(x.)]
Si on fait le changement de variable U = u(x) on obtient une fonction simple de U que l'on sait dériver par rapport à U.

Exemples ● $\cos(3x^2+4x+2) = \cos(U)$. ● $(5x^3+4)^7 = U^7$ ● $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{U}$ ● $\frac{1}{(6x+3)^4} = \frac{1}{U^4}$

or on a $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta U} \cdot \frac{\Delta U}{\Delta x}$ et par passage à la limite $[f]'_{(x)} = [f]'_{(U)} \cdot [U]'_{(x)}$ autrement dit

dérivée de f par rapport à x (dérivée cherchée) **=** (**dérivée de f par rapport à U**) **x** (**dérivée de U par rapport à x**)
Par exemple pour trouver la dérivée de $f(x) = (5x^3+4)^7$. On pose $U = 5x^3+4$ ce qui donne $f(U) = U^7$.
La dérivée de f(U) par rapport à U est $7U^6$ soit $7(5x^3+4)^6$. La dérivée de U par rapport à x est $15x^2$.
Et la dérivée de f(x) par rapport à x est égale au produit des 2 soit $(15x^2)\ 7(5x^3+4)^6$ = **$105x^2\ ((5x^3+4)^6$**

Sens de variation d'une fonction

f(x) est croissante sur [a,b] si pour tout x et y ∈ [a,b] $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$ autrement dit $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$

L'étude du signe de f'(x) permet d'étudier le sens de variation de f(x). <u>Sur un intervalle donné</u>

● si **f '(x) < 0** , f(x) est **décroissante** ● si **f 'x)> 0**, f(x) est **croissante** ● Si **f '(x) = 0**, f(x) est **constante**.
Si la dérivée change de signe en x_0, (on a $f'(x_0) = 0$) on dit que la fonction admet un extremum local (maximum ou minimum) en ce point.

Plan d'étude d'une fonction

1) Domaine de définition

Notamment on exclut de **R** les valeurs de X qui annulent un dénominateur ou les valeurs de X qui rendent négative une expression figurant sous une racine.

2) Parité, imparité, périodicité

Une fonction est paire si **f(X) = f(–X).** Graphe symétrique par rapport à l'axe des Y .

Une fonction est impaire si **f(X) = –f(–X)** . Graphe symétrique par rapport à O

Une fonction est périodique s'il existe un nombre P tels que pour tout X, **f(X+P) = f(X)**.

Ces propriétés permettent de restreindre l'étude à $\mathbf{R}^+$ ou à une période.

3) Calcul des limites aux bornes du domaine de définition

Voir le chapitre intitulé « limites ».

on détecte notamment l'existence d'asymptotes

horizontale $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$, verticale $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ ou oblique $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

l'asymptote oblique a une équation **y = ax + b** avec **a** = lim f(x)/x et **b** =lim [f(x) – ax]

a, b et c étant des nombres réels

4) Calcul de la fonction dérivée et étude de son signe

L'expression de la fonction dérivée f '(x) nous renseigne sur la dérivabilité de f (x).

L'étude du signe de la dérivée utilise les techniques habituelles, appliquées, le plus souvent, aux polynômes du premier ou du second degré ou aux fractions rationnelles. On en déduit le sens de variation de la fonction, d'une limite du domaine de définition à l'autre, en passant par d'éventuels extremums (minimums ou maximums) quand la dérivée s'annule en changeant de signe.

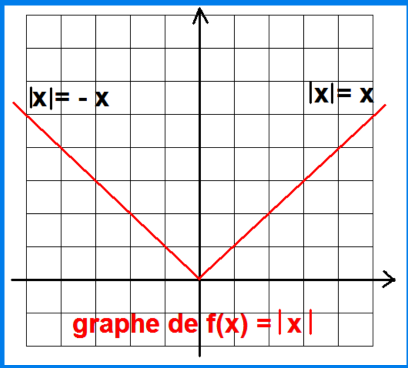
Si la fonction admet des extremums pour $X=X_1$, $X= X_2$, ...on calculera les valeurs de ces extremums ($f(X_1)$, $f(X_2)$, ...) et on les fera figurer dans le tableau de variation.

5) tracé du graphe

On localisera si possible les points où la courbe coupe les axes (f(0) et solutions de f(x) =0). On tracera d'éventuelles asymptotes. Si nécessaire on situera certains points intermédiaires du graphe avec le tracé des tangentes au graphe en ces points. On obtient ainsi une sorte de « coffrage » dans lequel la courbe doit se couler sans heurt ni contradiction.

6) problème annexes

- déterminer une équation y = ax + b de tangente au graphe au point P d'abscisse X_0.
  Pour cela on commence par calculer $f(X_0)$ ordonnée de P. Puis on calcule $a = f'(X_0)$.
  puis on calcule b en écrivant que P appartient à la tangente c'est-à-dire $f(X_0) = f'(X_0).X_0 + b$.
- Quelquefois on nous demande d'utiliser le théorème selon lequel si f(X) est continue sur [a,b], la courbe admet entre a et b au moins une tangente de coefficient directeur $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, c'est-à-dire une tangente // à la droite qui relie les points [a,f(a)] et [b,f(b)]
- déterminer les points d'intersection du graphe de f(x) avec une droite ou une courbe d'équation y=g(x) . Pour cela il faut résoudre l'équation f(x) = g(x).
- Quelquefois on nous demande simplement d'utiliser le théorème selon lequel, si f(x) est monotone et continue sur [a,b], pour tout réel K compris entre f(a) et f(b), l'équation f(x) = K admet une solution et une seule.
- déterminer la position relative du graphe de f(x) et d'une droite ou une courbe d'équation y=g(x).
  pour cela il faut résoudre (ou démontrer) par exemple f(x) > g(x) (f au dessus de g)



Valeur absolue

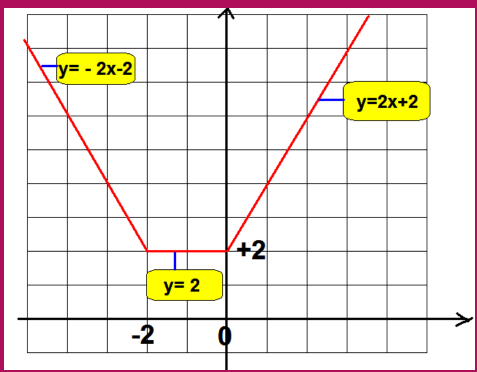
Définition |x| = d(0,x) autrement dit
|x| = x si x ≥ 0 et |x| = - x si x≤ 0

Propriétés

Pour tous réels x,y on a
d(x,y) =|x – y| ou |y –x|
|x| = | - x| et $\sqrt{x^2} = |x|$
|x.y| = |x|.|y| et $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
|x – y | ≤ |x|+|y| et |x + y | ≤ |x|+|y|
(inégalité triangulaire)

Valeur absolue et intervalle:

pour r >0 soit a un nombre, x quelconque
|x – a | ≤ r équivalent à d(x , a) ≤ r
équivalent à x ∈ [a-r ; a+r]

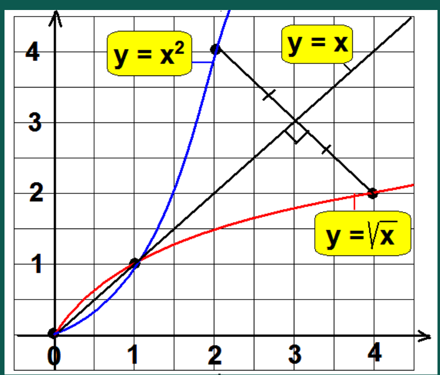


Graphe de f(x)= |x| + |x+2|

On définit |x| et |x+2| selon les valeurs de x et on les ajoute sur chaque intervalle pour faire f(x).
|x| = x pour x ≥ 0 et |x| = -x pour x ≤ 0
|x + 2| = x + 2 pour x ≥ -2 et |x + 2| = - x - 2 pour x ≤ -2

x	-∞ - 2	0	+∞
|x|	-x	-x	x
|x+2|	- x - 2	x + 2	x + 2
f(x)	- 2x - 2	2	2x + 2

F(x) est défini de 3 façons différentes selon l'intervalle dans lequel on choisit x. Le graphe est défini en 3 morceaux.
Pour démontrer que f(x) = 2 constitue un minimum de la fonction il suffit de démontrer que sur chaque intervalle f(x) ≥ 2



La fonction racine

$\sqrt{x}$ n'est définie que pour x positif.

● Pour démontrer que y =$\sqrt{x}$ est croissante il faut démontrer que si a - b est positif $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ l'est aussi.

Or $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

La fraction étant positive, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ l'est aussi.

● Par ailleurs si y = f(x) la fonction qui à tout y fait correspondre son antécédent x est appelée **fonction réciproque de f notée f^{-1}. y=f^{-1}(x)**

Donc si (x,y) est un point du graphe de f, le point (y,x) est un point du graphe de f^{-1}. Et comme ces deux points sont symétriques par rapport à la droite y =x, le graphe de f^{-1} doit être symétrique du graphe de f par rapport à cette droite.

Or si pour tout x positif on définit y =x^2, connaissant y on peut calculer son antécédent x grâce à la relation x =$\sqrt{y}$. Ce qui fait que la fonction "racine" est la réciproque de la fonction "carré" et les deux graphes sont symétriques par rapport à la bissectrice des axes autrement dit par rapport à la droite y =x.

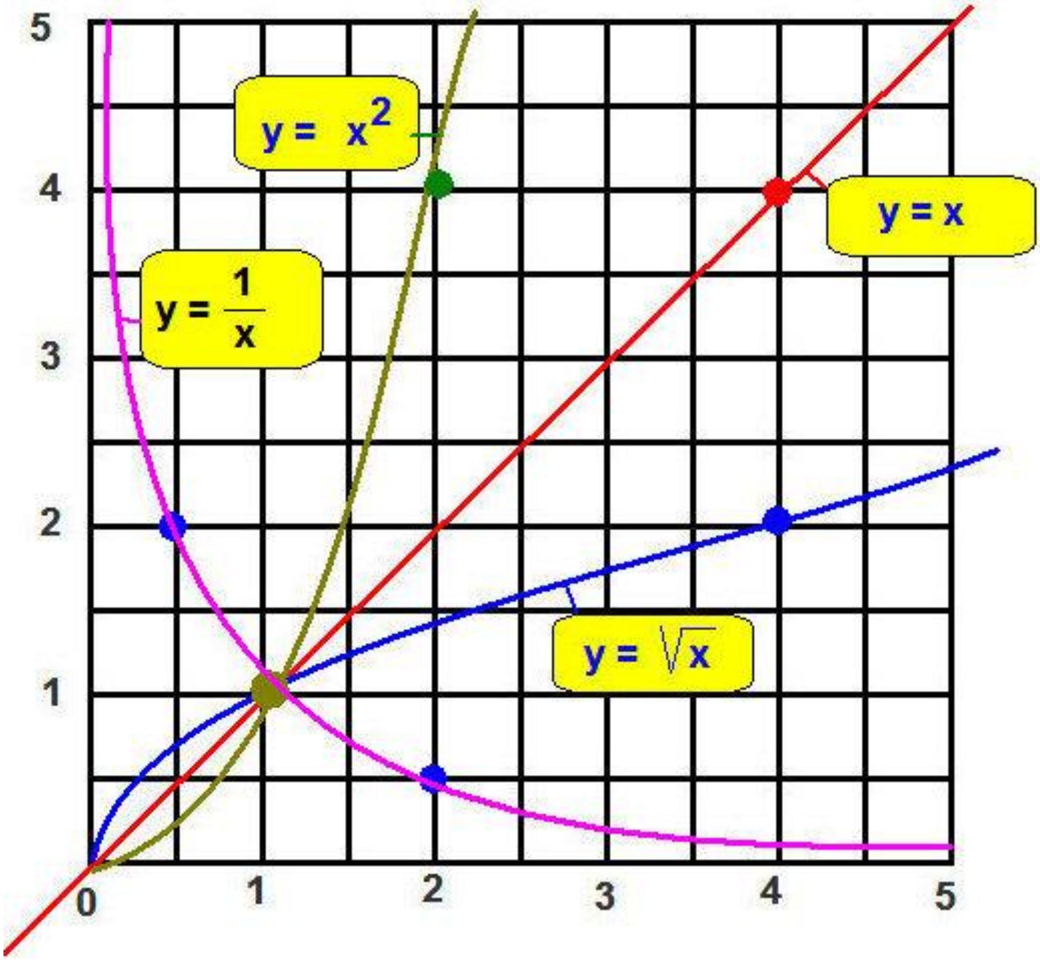
Extensions de fonctions

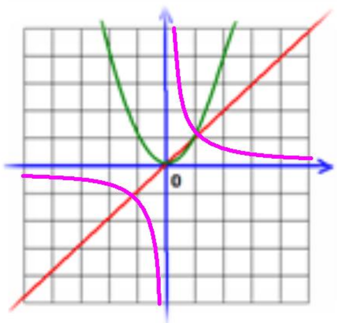
Soit u une fonction connue et k un nombre réel. Que peut – on dire de la fonction f dans les cas suivants?

f = u+k	u et f ont même sens de variation. Leurs graphes se déduisent l'un de l'autre par translation.
f = ku	sens de variation identique si k positif. Sinon différent. – u symétrique de u par rapport à Ox
f = $\sqrt{u}$	u doit être positive sur le domaine de définition de f. u et f ont même sens de variation.
$f = \frac{1}{u}$	quand la valeur absolue de u est grande celle de f est petite et vice versa. Le sens de variation de f est le contraire de celui de u.

Fonctions usuelles

Ci dessous une partie du graphe des fonctions $f(x) = x^n$ pour $n = -1$, $n = \frac{1}{2}$ $n= 1$ et $n = 2$.





Pour $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ et $f(x) = 1/x$ il manque la partie du graphe correspondant aux abscisses négatives.
Tandis que $f(x)=\sqrt{x}$ n'est pas définie pour $x < 0$. (Pas de graphe pour $x<0$)
La fonction $f(x)=x^2$ étant paire, (puisque $f(-x)=f(x)$) son graphe (en vert) est symétrique par rapport à l'axe des y.
$f(x)=x$ et $f(x) = 1/x$ étant impaires (puisque $f(-x)= - f(x)$) leur graphe (en rouge et carmin) est symétrique par rapport au point O.

Calcul de la dérivée et sens de variation:

$f(x)=x$	$f' = 1$	Dérivée toujours positive, fonction croissante sur $\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$f' =2x$	Dérivée positive sur $\mathbb{R}^+$ et négative sur $\mathbb{R}^-$ Donc fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f' =\frac{1}{2\sqrt{x}}$	Dérivée positive sur le domaine de définition $\mathbb{R}^+$ donc fonction croissante.
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f' = \frac{-1}{x^2}$	Dérivée toujours négative, fonction décroissante sur $\mathbb{R}$, non définie en x= 0

Tous les graphes de fonctions $f(x) = x^n$ passent par le point (1,1).

Pour x entre 0 et 1 on a …. $x^4 < x^3 < x^2 < x < x^{\frac{1}{2}} < x^{-1}$ ….

Pour x > 1 c'est le contraire …. $x^4 > x^3 > x^2 > x > x^{\frac{1}{2}} > x^{-1}$

STATISTIQUES
et PROBABILITES

Introduction aux probabilités
Description d'une série statistique
Les dénombrements (pas au programme mais utiles en 1ere S pour compter issues possibles et favorables)
Loi binomiale
Echantillonnage.

Avertissement.

Ensembles particuliers et notations.

Ensembles au sens trivial et éléments

{x, y , z} pour désigner un ensemble contenant 3 éléments , x, y, z .

Ensembles produits et n- uplets

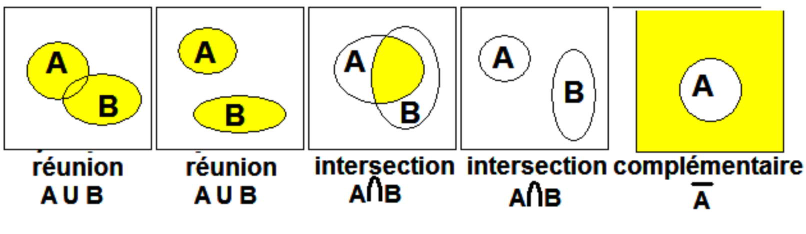
(x , y , z) pour désigner un **triplet**, c'est-à-dire un élément formé de 3 composantes (comme un vecteur), dont chacune provient d'un ensemble donné.
Si par exemple $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$, (x,y,z) est un élément de **l'ensemble produit** AXBXC constitué par tous les triplets qu'on peut construire de la sorte.
A,B,C peuvent d'ailleurs désigner le même ensemble mais pour autant (x,y,z) sera différent de (y,x,z).
Les éléments de A X B sont appelés les **couples** (x,y) tandis que l'ensemble {x,y} est appelé **paire** ou **doubleton**.
Les éléments d'un ensemble produit de n ensembles sont appelés des **n-uplets**.

Ensembles ordonnés et arrangements.

Nous serons quelquefois confrontés à des ensembles ordonnés ce qui signifie que le groupement de 3 éléments {x,y,z} sera différent du groupement {y,x,z} pourtant obtenu à partir des mêmes éléments extraits du même ensemble mais dans un ordre différent.
Tout groupement ordonné de n éléments sera appelé **arrangement** de n éléments.
Comme il n'existe pas à notre connaissance de notation officielle pour un arrangements nous utiliserons indifféremment soit **{x,y,z}o** pour ensemble ordonné, soit **{x,y,z}a** pour arrangement.
Mais ne perdez pas de vue que cette notation nous est personnelle.

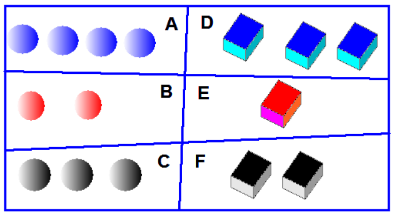
Pré – requis et vocabulaire.

La définition des principales opérations sur les ensembles est supposée connue:



Réunion : ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B, soit aux deux.
Intersection : ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B (cet ensemble peut être vide).
Complémentaire de A dans Ω, ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.

Un ensemble T contient plusieurs **éléments** distingués par des **caractères** (couleur, sexe, numéro, poids, forme, …).
Certains caractères comme la couleur sont qualitatifs, d'autres, comme le poids, sont quantitatifs (exprimés par un nombre).
Dans un premier temps nous nous intéressons aux seuls caractères qualitatifs.
Chaque caractère peut prendre plusieurs "valeurs" que l'on appelle "**modalités**". Par exemple : "bleu", "blanc", "rouge" sont des modalités du caractère couleur.



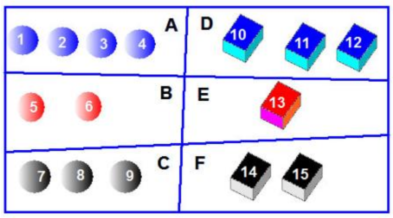
Voici un ensemble dont les éléments, définis comme équiprobales devant un tirage, sont dotés de **2 caractères** la forme et la couleur.
La forme est déclinée en 2 **modalités** : boule ou cube.
La couleur est déclinée en 3 **modalités** : bleue, rouge ou noire.
Cet ensemble peut être découpé en fonction du caractère qui nous intéresse en 2 sous ensembles "boules" et "cubes" ou en 3 sous ensembles "bleus", "rouges", "noirs".

Les éléments ayant à la fois la même forme et la même couleur sont regroupés en 6 sous ensembles A, B, C, D, E, F dont la réunion forme l'ensemble T.
On tire au hasard un élément de cet ensemble, et, sachant que tous les éléments ont la même probabilité d'être tirés, on peut nous demander de calculer, par exemple, la "probabilité de tirer une forme rouge" ou la "probabilité de tirer une boule".

Voici comment le site du CNED (académie en ligne) définit le vocabulaire que nous utilisons en probabilité.

Une **expérience aléatoire** est une expérience pour laquelle plusieurs résultats sont possibles, sans que l'on puisse prévoir celui qui se produira. Les résultats possibles sont aussi appelés **les issues** ou **les éventualités**. Dans l'étude d'une expérience aléatoire, les notions ci-dessous sont fondamentales.
Univers : c'est l'ensemble de toutes les issues de l'expérience aléatoire, il est souvent noté Ω.
Evénement : c'est un sous-ensemble de l'univers.
Evénement élémentaire : un événement constitué d'une seule éventualité.
Evénement certain : c'est l'univers lui-même Ω.
Evénement impossible : c'est l'ensemble vide ∅

Ces définitions amènent les remarques suivantes:



Selon que l'expérience aléatoire est composée d'un tirage individuel, d'un tirage multiple ou de plusieurs tirages successifs, les issues changeront de forme.
Par exemple, une issue peut revêtir les formes suivantes:
{11} si on tire un élément unique
{5 ; 11; 15} si on tire simultanément 3 objets. Dans ce cas {5;11;15} = {11;15;5}.
{5 , 11, 15}o un arrangement si on tire successivement 3 objets, sans remise
(x,y,z) un triplet si on tire 3 objets avec remise ou 3 objets dans 3 ensembles différents

{a,b, c}o et {b,a,c}o contituent deux **permutations** différente d'un arrangement (et 2 arrangements différents).
(a,b,c) et (b,a,c) constituent 2 triplets différents de l'ensemble produit AXBXC dans la mesure où dans (a,b,c) la composante provenant de A est a tandis que dans (b,a,c) c'est b.

Evènements composites. On peut définir un évènement en associant plusieurs modalités par des opérateurs logiques (Ou, Et , Non) ce qui donne des évènements composites auxquels correspondent des sous - ensembles composites.

Evènement composite	sous - ensemble correspondant
Boule **ET** noire (autrement dit "boule noire")	C intersection de "boule" et de "noire"
Cube **ET** rouge (autrement dit "cube rouge")	B intersection de "cube" et de "rouge"
cube **ET** boule	∅ ensemble vide aucun élément n'est à la fois "cube" et "boule"
"boule" **OU** ""noire"	réunion de "boule" avec "noire" A **U** B **U** C **U** F
"boule" **OU** "cube"	réunion de "boule" avec "cube" soit Ω l'univers tout entier
NON rouge (= "bleue" OU "noire")	Complémentaire de "rouge" dans Ω = A **U** D **U** C **U** F

Donc quand on associe deux évènements par un **ET** on fait leur **intersection**.
Quand on les associe par un **OU** on fait leur **réunion**.
À la **négation** d'un évènement correspond son **complémentaire** dans l'univers.

L'axiomatique des probabilités

● Le concept de « probabilité » est intuitif. On l'utilise quand on dit par exemple "Tel club a une chance sur mille de remporter la coupe d'Europe" ou "il ya 9 chances sur 10 pour qu'il pleuve avant la fin de la semaine".

Mais en mathématiques, le contexte et le concept doivent obéir à des règles définies par Kolmogorov (1933):

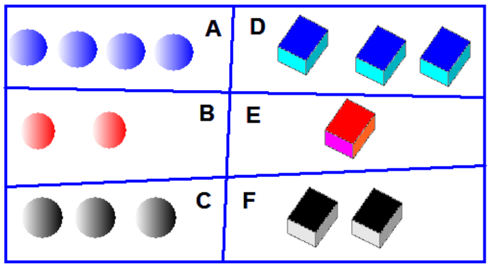
● **L'univers Ω** est l'ensemble des issues possibles de l'expérience aléatoire. Il doit être probabilisable, autrement dit il doit pouvoir être scindé en sous ensembles appelés **évènements** selon les questions que l'on peut se poser sur la probabilité des modalités présentes dans **Ω**. Les évènements doivent vérifier les propriétés suivantes:
① Si A est une partie de l'univers (un évènement) dont on peut calculer la probabilité, ce doit aussi être le cas du complémentaire de A dans l'univers (que l'on note $\overline{A}$, autrement dit "non A" ou "contraire de A")
② Si A1, A2, …., An sont des évènements dont on peut calculer la probabilité, on doit aussi pouvoir calculer la probabilité de la réunion de ces évènements A1 U A2 U … U An
③ L'univers et l'ensemble vide sont des parties dont on doit aussi pouvoir calculer la probabilité

Un ensemble de parties possédant ces propriétés s'appelle une "**TRIBU**". On peut appeler "**évènement**" toute composante d'une tribu. **Il faut donc voir les évènements comme des ensembles pouvant contenir une issue, plusieurs issues, aucune issue (ensemble vide ∅) ou toutes les issues (l'univers Ω)**

● Le nombre exprimant la probabilité doit être compris entre 0 et 1. Il constitue une mesure de l'évènement. Il doit être précisément quantifié, soit par un dénombrement (on compte les éventualités composant l'évènement et celles de l'univers), soit par la comparaison de plusieurs mesures (mesure de l'évènement et mesure de l'univers).
Observons que le nombre d'éléments d'un sous-ensemble A en constitue une mesure. Si on divise cette mesure par le nombre d'éléments de Ω on obtient une autre mesure qui n'est autre que la fréquence de A dans Ω.
Or la fréquence de A (sous – ensemble de Ω) dans Ω est comprise entre 0 et 1.

En plus d'être une mesure la probabilité doit vérifier les propriétés suivantes:
❶ à un évènement Ai elle fait correspondre un nombre P(Ai) compris entre 0 et 1. $P(A_i) \in [0 ; 1]$.
❷ si les évènements A1, A2, …, An sont 2 à 2 disjoints P(A1 U A2 U …U An)=P(A1)+P(A2)+…+P(An)
❸ P(∅)=0 et P(Ω) =1

On en déduit immédiatement que
❹ $P(\overline{A})= 1- P(A)$ La probabilité de A + la probabilité du contraire (complémentaire) de A = 1.
puisque $\overline{A}$ U A = Ω et que ce sont 2 parties disjointes.
❺ Si A et B sont 2 parties ayant une intersection commune (A ∩ B) on a P(A U B) = P(A)+P(B)- P(A ∩ B)
puisque (A) et (B - A ∩ B) disjointes de réunion (A U B) ainsi que (B-A∩B) et (A∩B) disjointes de réunion (B).



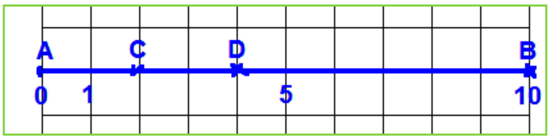
Pour reprendre l'exemple où l'on tire une forme dans Ω:
Tout sous ensemble de Ω qu'il contienne 1, 2 ou 14 éléments constitue une partie de Ω. Si on ajoute Ω et l'ensemble vide à l'ensemble de ces sous-ensembles, on obtient l'ensemble nommé "parties de Ω ", et cet ensemble fait de Ω un ensemble probabilisable. Puisque la réunion de 2 parties de Ω est une partie de Ω, le complémentaire d'une partie de Ω est une partie de Ω et Ω ainsi que l'ensemble vide sont des parties de Ω.

Ensuite, il suffit de définir la fréquence dans Ω d'une partie A de Ω comme le rapport $\frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$ et **la fréquence de A dans Ω est une probabilité sur Ω** puisque la fréquence est un nombre compris entre 0 et 1, la fréquence de Ω est 1, la fréquence de l'ensemble vide est 0, si on prend 2 parties disjointes de Ω (A et B) la fréquence de A **U** B est égale à la somme de la fréquence de A et de la fréquence de B.
Toute partie de Ω peut donc être considérée comme un évènement possible lors d'un tirage aléatoire lorsque Ω remplit un sac ou une urne, mais pour que le tirage soit aléatoire, il ne faut pas, par exemple, que l'une des formes soit bien plus grosses que les autres ce qui augmente ses chances d'être tirée. Il faut que les formes soient équiprobables.
De l'étude de ce cas particulier on peut déduire une loi générale:

Si tous les éléments d'un ensemble Ω qui en comporte un nombre fini (on peut les compter) sont équiprobables devant un tirage aléatoire, **tout sous ensemble de Ω constitue un évènement possible pour ce tirage**,
la fréquence de tout évènement dans Ω constitue une probabilité de l'évènement sur Ω,
et c'est communément cette probabilité qu'on nous demande de calculer.

Extension de la notion de probabilité aux ensembles infinis.

Certains ensembles infinis comme l'ensemble des nombres entiers ne sont pas mesurables, d'autres comme le segment de droite sont mesurables même s'ils contiennent une infinité de points.
Seuls les ensembles mesurables sont probabilisables.



La mesure d'un segment peut être une notion physique (AB = 10 cm) ou mathématique (par exemple ce segment est porté par un axe et la longueur du vecteur unité définit l'unité de mesure). Dans ce dernier cas on dit AB = 10 (sans unité de mesure).

On peut imaginer une expérience aléatoire qui consiste à piquer un point au hasard sur [AB] de mesure 10 et s'interroger sur la probabilité que ce point soit situé sur [CD] de mesure 2.
Cet espace est – il probabilisable? Oui, il suffit de considérer les parties de [AB] constituées de segments inclus dans [AB], de la réunion d'un nombre quelconque de ces segments, de [AB] lui-même et de l'ensemble vide.
Ces parties constituent une tribu, l'existence de cette tribu fait de [AB] un ensemble probabilisable pourvu qu'on s'interroge sur la probabilité d'évènements ainsi définis. Ce qui est le cas de notre exemple.
Comment définir une probabilité sur [AB]?
Soit X une partie de [AB]. Que X soit un segment ou une réunion de segments, X a une mesure que nous pouvons facilement évaluer. Si l'on définit **$P(X) = \frac{\text{mesure de } X}{\text{mesure de } [AB]}$** , P(X) est une probabilité sur [AB] , c'est la probabilité de l'évènement X.

Plus généralement.

Lignes, surfaces, volumes <u>usuels</u> ou même le temps sont des espaces mesurables.
Dans de tels espaces, les évènements dont on veut mesurer la probabilité doivent être eux mêmes mesurables.
Ou plutôt la tribu des évènements doit être constituée de sous ensembles mesurables.
En général, on s'interroge sur la probabilité pour qu'un ou plusieurs points obtenus par un processus aléatoire soient contenus dans un sous espace mesurable d'un espace mesurable.
Généralisons la notion de probabilité aux espaces mesurables:

Soit Ω un espace mesurable
X une partie mesurable de cet espace.
$P(x) = \frac{\text{mesure de } X}{\text{mesure de } \Omega}$ définit la probabilité communément utilisée sur Ω .

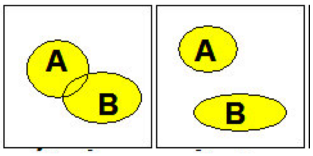
Remarquons qu'un point constitue une partie d'un espace géométrique infini ou un instant une partie d'un temps mais le point et l'instant ont une mesure nulle et à ce titre ils ont une probabilité nulle.
Autrement dit la probabilité de tirer un point particulier dans un espace infini mesurable est nulle.

Les bases du calcul de probabilités

On note une probabilité par un P suivi de parenthèses, ces parenthèses contenant le libellé de l'évènement P(A), P(A OU B) ou le libellé de l'ensemble correspondant à un évènement composite P ($A \cup B$).

L'ensemble $A \cup B$ correspondant à l'évènement A ou B et l'ensemble $A \cap B$ correspondant à l'évènement A et B.
Ce que mesure une probabilité c'est toujours un ensemble.

Evènements compatibles et incompatibles



Si les ensembles qui correspondent aux évènements ont une intersection non nulle, cela signifie qu'il existe au moins un tirage pour lequel les évènements A et B sont simultanément réalisés.
Dans ce cas on dit que les évènements sont compatibles ou "sécants".
Dans le cas contraire les évènements sont incompatibles ou "disjoints".

Par exemple dans notre exemple de tirage aléatoire d'une forme l'évènement " boule" et l'évènement "cube" sont incompatibles (il n'existe pas de forme qui soit à la fois boule et cube), par contre l'évènement "boule" et l'évènement "rouge" sont compatibles puisqu'ils sont simultanément réalisés lorsqu'on tire une boule rouge.

Propriétés immédiates:

$P(\Omega) = 1$ (l'évènement "l'élément tiré appartient à Ω" est une certitude. Une certitude a une probabilité égale à 1)
$P(\emptyset) = 0$ (l'évènement est l'ensemble vide, évènement impossible)

Si A et B sont incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) on a **P(A ou B)** = $P(A \cup B)$ = **P(A)+ P(B)**

Si A et B sont compatibles ($A \cap B \neq \emptyset$) on a **P(A ou B)** = $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ = **P(A)+ P(B) – P(A et B)**

$P(\Omega)$ = $P(\bar{A}) + P(A)$ = **1** (Il est certain que toute issue réalise soit l'évènement A soit son contraire).

Lorsqu'une expérience aléatoire est composée de n tirages identiques.

Un tirage est recommencé à l'identique n fois.
Si Ri est le résultat du i^{éme} tirage , le résultat de l'épreuve constituée de n tirages est notée (R1, R2,….,Rn).

Lorsqu'un tirage est répété n fois dans des conditions identiques:
La probabilité pour que l'évènement A1 se produise au premier tirage, A2 au 2^{e} tirage, et ainsi de suite jusqu'à An au n^{eme} tirage est P(A1,A2,…..,An) = P(A1)xP(A2)x ……xP(An).

Par exemple si on jette 3 fois un dé équilibré.
P(5,1,4) = $\frac{1}{6} \text{x} \frac{1}{6} \text{x} \frac{1}{6}$ (obtenir 5 au 1ere tirage, 1 au 2^{e} tirage, 4 au 3^{e} tirage)
P(pair, 5, multiple de 3) = $\frac{1}{2} \text{x} \frac{1}{6} \text{x} \frac{1}{3}$ (obtenir un nombre pair au 1ere tirage, 5 au 2^{e} tirage, un multiple de 3 au 3^{e} tirage)
P(5, pas 5, 5) =$\frac{1}{6} \text{x} \frac{5}{6} \text{x} \frac{1}{6}$ (obtenir 5 au 1ere tirage, un autre nombre que 5 au 2^{e} tirage, 5 au 3^{e} tirage)

Si l'évènement observé au cours des tirages est toujours le même, (en général l'apparition d'une modalité donnée d'un caractère quelconque, par exemple l'apparition du 5 dans le dernier exemple), lors d'un tirage cet évènement va se produire avec une probabilité p ou ne pas se produire avec une probabilité q = 1 – p.
Si, comme Bernouilli en eut l'idée, on note 1 l'apparition de la modalité attendue au cours d'un tirage et 0 sa non apparition, le résultat d'une épreuve est une suite de 0 et de 1 comme (1,0,0,0,1,1,0,0) qui signifie que l'épreuve comporte 8 tirages et que le l'évènement attendu s'est produit aux 1er, 5^{e} et 6^{e} tirages.
La probabilité d'une telle issue est **p**qqq**pp**qq soit p^3q^5 comme chaque fois que l'évènement attendu se produit 3 fois au cours des 8 tirages.

Parmi les questions qui se posent :
Toutes les issues sont – elle équiprobables? Non, par exemple une issue avec 4 fois 1 aura pour probabilité $p^4q^4 \neq p^3q^5$
Combien d'issues possibles pour une telle épreuve ?
L'issue (0,0,1,1,1,0,0,0) est différente de l'issue (1,0,0,0,1,1,0,0) mais sa probabilité est la même p^3q^5. Il faudrait ajouter les probabilités de toutes les issues avec trois 1 pour connaître la probabilité que l'évènement observé se produise 3 fois dans une épreuve de 8 tirages. Combien l'univers contient – il d'issues possibles avec trois 1?

Pour répondre aux deux dernières questions, il vaut mieux avoir étudié certaines techniques de dénombrement.
C'est l'objet du prochain chapitre.

Dénombrements

En probabilité on a souvent besoin de compter les éléments d'un ensemble et il n'est pas rare que l'on ait souvent à faire appel aux techniques de dénombrement que nous allons étudier, éventuellement avec l'aide de la calculette ou d'un tableur.

Nombre de permutations d'un ensemble de n éléments.

Soit un ensemble ordonné E= {1,2,3}o. Il constitue ce qu'on appelle un arrangement. Lorsqu'on change l'ordre de ses éléments {2,1,3}o on obtient ce que l'on appelle une permutation de E. Un arrangement différent du premier. Combien de permutations peut – on faire d'un ensemble de 3 éléments? Et plus généralement d'un ensemble de n éléments?
On retrouve **le nombre de permutations** de E grâce à l'arbre suivant où l'on a mis successivement chacun des 3 éléments en 1ere position, les 2 autres en seconde position, et bien sur l'élément restant en 3^{e} position:

		3	1, 2, 3
	2		
1			
	3		
		2	1, 3, 2
		3	2, 1, 3
	1		
2			
	3		
		1	2, 3, 1
		2	3, 1, 2
	1		
3			
	2		
		1	3, 2, 1

Lorsqu'on cherche le nombre de permutations d'un ensemble de n éléments on raisonne de la façon suivante

- En 1ere position on a **n** possibilités
- pour chacune d'elles, une fois le 1er élément situé, en 2^{e} position on a **n – 1** possibilités **n(n-1)** en tout
- pour chaque classement des 2 premiers, en 3^{e} position on a **n -2** possibilités. **n(n-1)(n-2)** en tout.

…. et ainsi de suite jusqu'à…

- pour chaque classement des n – 1 premiers, en n ^{eme} position on a **1** seule possibilité.

Donc **le nombre de permutations possibles, le nombre de classements possibles pour un ensemble de n éléments est le nombre n! = n(n-1)(n-2)….(2)1.**
Pour 3 éléments cela donne 3! = 3x2x1 = 6. **Le nombre n! est appelé "factorielle n".**

Nombre d'éléments d'un ensemble produit.

Soit A un ensemble de 3 éléments {x,y,z} et B un ensemble à 2 éléments {a,b}. En empruntant un élément à chaque ensemble je peux faire ce qu'on appelle un couple tel que (x,a) ou (z,b) où le premier élément appartient A et le second à B. C'est l'ensemble de ces couples qu'on appelle l'ensemble produit A X B. On peut sans difficulté imaginer que l'ensemble produit A X B XC est l'ensemble des triplets (x,y,z) avec x $\in$ A, y $\in$B, z $\in$ C.
Dans un triplet (comme dans un vecteur) x,y,z sont les composantes d'un élément unique, classées selon leur "provenance". Dans un arrangement x,y,z forment un groupement de 3 éléments issus d'un même ensemble qui, ordonnés différemment donneraient un autre arrangement.
Comment compter le nombre d'éléments d'un ensemble produit?
On peut construire A X B grâce au tableau à double entrée de 3 x 2 cases suivant:

	x	y	z
a	(x,a)	(y,a)	(z,a)
b	(x,b)	(y,b)	(z,b)

On comprend que si A compte **n** éléments et B compte **p** éléments, A X B compte **np** éléments.
Si on ajoute un ensemble C comptant **q** éléments, pour constituer A X B X C il suffira d'associer tout élément de A X B à chaque élément de C pour constituer tous les triplets.
On en dénombrera donc **npq**.
On peut généraliser ce résultat à un ensemble produit de n ensembles: **Le nombre d'éléments d'un ensemble produit et égal au produit des nombres d'éléments de chacun des ensembles qui le constitue.**

Nombre des arrangements de p éléments qu'on peut réaliser avec un ensemble de n éléments.

Pour fixer les idées, 5 chevaux numérotés de 1 à 5 disputent une course. Les 3 premiers forment le tiercé gagnant (le podium) mais l'ordre ayant de l'importance {1,2,3}o n'est pas le même tiercé que {1,3,2}o par exemple et un tiercé est donc un arrangement de 3 chevaux parmi 5. Le mot arrangement suggérant que l'ordre a de l'importance.
Avec 5 chevaux, combien peut-on faire d'arrangements de 3 chevaux?

		3	123
	2	4	124
		5	125
		2	132
	3	4	134
1		5	135
		2	142
	4	3	143
		5	145
		2	152
	5	3	153
		4	154

Faisons un arbre recensant toutes les possibilités quand le 1 occupe la première place puis généralisons:
Pour occuper la première place nous avons **5** possibilités.
Une fois la première place occupée il reste **4** concurrents pour occuper la deuxième. (5x4 pour les 2 rangs).
Et enfin, quand les 2 premiers sont en place, il reste **3** concurrents pour occuper la troisième place.
Avec 5 chevaux, on peut donc réaliser **5**x**4**x**3** = 60 arrangements de 3 chevaux.
Plus généralement avec un ensemble de n éléments, on pourra réaliser **n(n – 1) (n-2) …..(n-p+1)** arrangements de p éléments. Ce nombre étant formé des **p premiers facteurs de n !**
On peut également l'écrire $\mathbf{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$, par exemple $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{5x4x3x2x1}{2x1} = 5x4x3 = 60$.

Nombre de combinaisons de n éléments pris p à p.

Une combinaison de p éléments est un sous ensemble de p éléments pris dans un ensemble d'effectif n , sans considération d'ordre ou de rang. Donc cette fois {1 ; 2 ; 3} est la même combinaison que {1; 3 ; 2} par exemple.
Avec une combinaison de 3 éléments, on peut faire 3! permutations.
Donc avec une combinaison de 3 éléments on fait 3! arrangements. (3! = 6).
Avec une combinaison de p éléments on peut faire p! arrangements.
Donc : le nombre de combinaisons de n éléments pris p à p (noté $[{n \atop p}]$) est p! fois plus petit que nombre d'arrangements de p éléments pris parmi n.

$$\left[{n \atop p}\right] = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

par exemple nombre de combinaisons de 49 nombres pris 6 à 6 = $\frac{49!}{(49-6)!6!} = \frac{49x48x47x46x45x44}{6x5x4x3x2x1} = 13.983.816$

Tirages multiples

Tirages avec remise

On tire 3 fois une carte d'un paquet de 52 cartes en remettant chaque fois la carte tirée dans le paquet.
Nous appelons **épreuve** l'ensemble des 3 tirages et résultat de l'épreuve l'ensemble des 3 cartes tirées.
Le résultat d'une épreuve est donc un triplet (**a,b,c**) où **a** est le résultat du 1er tirage, **b** le résultat du 2^{e} , **c** le résultat du 3^{e}.
On s'interroge sur la probabilité de tirer 3 fois l'as de pique ou par exemple l'as de pique, le roi de cœur, la dame de carreau.

L'univers est le même d'un tirage à l'autre. Donc l'évènement résultat de chaque tirage est indépendant du précédent.
Lors d'un tirage les 52 cartes sont équiprobables. Lors d'une épreuve, la même carte peut être tirée plusieurs fois.
Donc si p est la probabilité d'un tirage, la probabilité de tirer n éléments particuliers au cours de n tirages est $p \times p \times \ldots \times p = p^n$

P(♠A ET ♠A ET ♠A) = $\frac{1}{52} \text{x} \frac{1}{52} \text{x} \frac{1}{52} = \frac{1}{140608}$
Mais pour calculer P(♠A ET ♥R ET ♦D) une précision s'impose.
Veut – on calculer la probabilité d'obtenir le ♠A au 1er tirage, le ♥R au 2^{e} tirage et la ♦D au 3^{e} tirage?
Dans ce cas cela correspond a une issue unique donc la probabilité de l'évènements est aussi $\frac{1}{140608}$.
Mais si on considère que l'ordre dans lequel on obtient ces 3 cartes est indifférent, (le protocole de l'expérience aléatoire nous l'imposant), cela veut dire que toute permutation de ces 3 cartes au cours des tirages sera considérée comme une issue équivalente. Et comme il existe 3! soit 6 façons différentes de les tirer, 6 façons de permuter ces 3 cartes de sorte que leur ordre change, 6 résultats d'épreuves possibles (6 issues) pour l'évènement {♠A, ♥R, ♦D} alors qu'il en existe un seul pour {♠A,♠A,♠A}, la probabilité cherchée devient donc $\frac{6}{140608}$

Une autre façon de résoudre ce problème est de dénombrer les issues dans Ω et dans l'évènement.
On peut considérer que compte tenu du libellé du problème, les 3 cartes tirées dans un ordre donné constituent un résultat de l'épreuve et donc une issue (élément de l'univers). Si nous devons construire l'univers, il est composé de tous les triplets de la forme (a,b,c) où a est le résultat du 1er tirage, b le résultat du 2^{e} , c le résultat du 3^{e} . Comment dénombrer cet univers? Il est équivalent de tirer successivement 3 fois dans un jeu de carte reconstitué ou de tirer simultanément une carte de 3 jeux de cartes semblables qu'on appellera A, B, C .
Cela revient à tirer un triplet (a,b,c) où $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$.
On reconnait le problème de dénombrement d'un ensemble produit.
Le nombre d'éléments de l'univers, le nombre de triplets (a,b,c) qu'on peut ainsi constituer est donc 52 x 52 x 52 = 140608.
Les triplets sont ordonnés par définition (a,b,c) ≠ (a,c,b), mais le protocole nous demande la probabilité d'obtenir 3 cartes données sans prendre en considération l'ordre dans lequel elles ont été tirées. On en déduit que toute permutation d'une issue appartient au même évènement. Autrement dit (a,b,c), (a,b,c), (c,b,a) appartiennent à l'évènement {a,b,c}
Or dans l'univers on trouve…
Les évènements de la forme {x,x,x} (3 cartes identiques) qui contiennent une seule issue.
Ceux la forme {x,x,y} (2 cartes identiques) qui contiennent 3 issues (x,x,y); (x,y,x); (y,x,x) .
Ceux de la forme {x,y,z} (3 cartes différentes) qui contiennent 6 issues (x,y,z); (x,z,y); (y,x,z); (y,z,x); (z,x,y); (z,y,x).
Un évènement à 1 issue de la forme {x,x,x} comme {♠A,♠A,♠A} a donc une probabilité de $\frac{1}{140608}$ et un évènement de la forme {x,y,z} comme {♠A, ♥R, ♦D} formé de 6 issues a 6 fois plus de chance de se produire sa probabilité est $\frac{6}{140608}$.
On retrouve les résultats précédents.

Un autre type de problème: Au cours d'une série de n tirages, un évènement donné se produit X fois ou ne se produit pas.
Sachant que 13 cartes sur 52 sont des piques, quelles sont nos chances, après 3 tirages de tirer 0 pique, 1 pique, 2 piques, 3 piques?
La probabilité de tirer 1 pique lors d'un tirage est $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ et donc la probabilité de tirer une autre couleur que pique est $\frac{3}{4}$.
Si on symbolise le résultat de chaque tirage par P pour pique et N pour non pique, et que nous appelions "épreuve" l'ensemble des 3 tirages, lorsque nous appliquons la loi sur la probabilité de réalisation de 2 évènements indépendants ou plus [P(A et B) = P(A).P(B)] nous avons:
Pour 0 pique un seul résultat d'épreuve (résultat NNN) de probabilité $\frac{3}{4} \text{x} \frac{3}{4} \text{x} \frac{3}{4} = \mathbf{\frac{27}{64}}$
Pour 1 seul pique 3 résultats d'épreuves (résultats PNN , NPN, NNP) de probabilité totale $3 \times \frac{3}{4} \text{x} \frac{3}{4} \text{x} \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{27}{64}}$.
Pour 2 piques 3 résultats d'épreuves (résultats NPP, PNP, PPN) de probabilité totale $3 \times \frac{1}{4} \text{x} \frac{1}{4} \text{x} \frac{3}{4} = \mathbf{\frac{9}{64}}$
Et pour 3 piques 1 résultat d'épreuve (résultat PPP) de probabilité $\frac{1}{4} \text{x} \frac{1}{4} \text{x} \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{64}}$
On remarque que

- une issue est le résultat d'une épreuve composée de 3 tirages (PNN et NPN sont 2 issue différentes).
- Dans l'univers il y a autant d'issues que de résultats d'épreuves possibles (2 possibilités par tirage, 3 tirages,2^3= 8 issues).
- Un évènement est formé par toutes les issues comportant le même nombre de P. Il y a donc les évènements 0 P, 1 P, 2 P, 3 P. Les issues composant un évènement ont toutes la même probabilité.
- La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des issues qui la composent.
- En sommant les probabilités de tous les évènements, (ou de toutes les issues) on trouve 1.
- Si une épreuve était composée de **n** tirages, le nombre d'issues pouvant donner **p** piques serait $\left[{n \atop p}\right]$.

Tirages sans remise

Problème no 1 On tire successivement 3 cartes d'un paquet de 52 cartes, sans remettre la carte tirée dans le paquet. Quelle est la probabilité P pour qu'à la fin de l'épreuve on ait en main ♠A,♥R et ♦D?

Remarques préliminaires:
- Le protocole néglige l'ordre des épreuves on peut tirer (par exemple) le ♠A au 1er tirage comme au 2^{e} ou au 3^{e}.
- La nature de l'univers changeant à chaque tirage, les évènements ne sont pas indépendants.

Pour le calcul, on peut procéder de différentes façons.

Calcul no 1

La probabilité de tirer une carte particulière (par exemple ♠A) au premier tirage est P(♠A) = $\frac{1}{52}$

Puis la probabilité conditionnelle P(♥R) sachant ♠A réalisé est $P_{♠A}$(♥R) = $\frac{1}{51}$

Puis la probabilité conditionnelle P(♦D) sachant ♠A ET ♥R réalisés est $P_{♠A\ ET\ ♥R}$(♦D) = $\frac{1}{50}$

Donc la probabilité de tirer ♠A puis ♥R puis ♦D (autrement dit le triplet (♠R, ♥R,♦D)) est $\frac{1}{52}\text{x}\frac{1}{51}\text{x}\frac{1}{50} = \frac{1}{132600}$

Mais comme toute permutation de ces 3 évènements constitue une épreuve favorable et que cela fait 3! = 6 épreuves favorables de même probabilité, la probabilité cherchée est $\frac{6}{132600} = \frac{1}{22100}$

Calcul no 2

Les 3 évènements étant incompatibles P(♠A OU ♥R OU ♦D au 1er tirage) = $\frac{3}{52}$

L'un des ces évènements étant réalisé la probabilité de réaliser l'un ou l'autre des 2 restants est $\frac{2}{51}$

Et enfin 2 de ces évènements étant réalisés la probabilité de réaliser le 3^{e} est $\frac{1}{50}$

Donc la probabilité cherchée est $\frac{3}{52}\text{x}\frac{2}{51}\text{x}\frac{1}{50} = \frac{1}{22100}$

Calcul no 3

On peut calculer la probabilité $\overline{\mathrm{P}}$ de tirer 0 ou 1 ou 2 de ces cartes et puis dire que P=1- $\overline{\mathrm{P}}$
Mais ce calcul est inutilement compliqué.

Calcul no 4.

On peut compter le nombre de combinaisons possibles de 52 cartes 3 par 3 soit [$\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{52}$] =$\frac{52\text{x}51\text{x}50}{3\text{x}2\text{x}1}$ =22100

Et comme une seule de ces issues est l'évènement favorable → P = $\frac{1}{22100}$

Remarque: Dans le cas d'un tirage sans remise …
<u>Si on néglige l'ordre des tirages</u>
Le dernier calcul prouve que il est équivalent de faire p tirages successifs ou de prélever en une seule fois p objet parmi les n du paquet.
Les issues possibles sont les combinaisons de n objets p à p.
<u>Si on ne néglige pas l'ordre des tirages</u>
Les issues possibles sont les arrangements de n objets p à p.

Problème no 2. On s'intéresse aux objets tirés non pas en tant qu'individus mais en tant que porteurs d'un caractère. Sur 3 tirages sans remise quelle est la probabilité de tirer 2 piques et un cœur (13 piques et 13 cœurs parmi les 52 cartes).

Calcul numéro 1

3 épreuves favorables (P pour pique et C pour cœur)

PPC probabilité $\frac{13}{52}\text{x}\frac{12}{51}\text{x}\frac{13}{50} = \frac{2028}{132600}$

PCP probabilité $\frac{13}{52}\text{x}\frac{13}{51}\text{x}\frac{12}{50} = \frac{2028}{132600}$

CPP probabilité $\frac{13}{52}\text{x}\frac{13}{51}\text{x}\frac{12}{50} = \frac{2028}{132600}$

Donc la probabilité cherchée est $3 \times \frac{2028}{132600} = \frac{6084}{132600} = \frac{1014}{22100}$

Calcul no2

Il existe [$\genfrac{}{}{0pt}{}{52}{3}$] =$\frac{52\text{x}51\text{x}50}{3\text{x}2\text{x}1}$ =22100 combinaisons possibles de 52 cartes 3 par 3.

Parmi elles il faut compter celles qui contiennent 2 piques et un cœur or il existe [$\genfrac{}{}{0pt}{}{13}{2}$] = 78 combinaisons de 2 piques et 13 combinaisons de 1 cœur en associant chaque combinaison de 2 piques à chaque combinaison de 1 cœur on trouve 78 x 13 = 1014 combinaisons de 2 piques ET 1 cœur.

Donc la probabilité cherchée est P = $\frac{1014}{22100}$, ce qui confirme le résultat précédent.

On peut noter le procédé pour calculer le nombre de combinaisons marquées par 2 modalités (ici 2 ♠+ 1 ♥) ou plus.

Variables aléatoires

On utilise une **variable aléatoire** quand les éléments d'un ensemble sont marqués par un caractère quantitatif comme le poids, l'âge, le nombre d'enfants, le prix, la contenance, la longueur, la surface, etc …
Ou quand les éléments d'un ensemble sont eux même des nombres, comme par exemple le nombre de fois qu'on a obtenu le 6 au cours de 20 jets d'un dé, ces 20 jets étant répétés 100 fois.

Supposons un ensemble E d'effectif N fini.
A chacun des N éléments on affecte une variable numérique aléatoire X qui prend n valeurs différentes de X1 à Xn. (n ≤N).
On dit des éléments qui partagent la même variable aléatoire Xi qu'ils forment **la classe Xi**.
Quelquefois on ne connait pas précisément la valeur de la variable aléatoire attachée à un élément donné mais on sait qu'elle se situe dans un intervalle. Par exemple xi $\in$ [10 ; 15]. Dans ce cas la classe est l'intervalle en question.
La classe Xi a un effectif Ni et la **fréquence** de cet effectif dans E est Fi = $\frac{\mathrm{Ni}}{\mathrm{N}}$.

Loi de probabilité de X

Remarquons d'ores et déjà que si on devait procéder à un tirage aléatoire sur E, on aurait Pi = P(X = Xi) = Fi
Et l'ensemble des couples (Xi, Pi) ou (Xi, Fi) formerait ce qu'on appelle la **loi de probabilité de X.**
On appelle **fonction de répartition de X** la fonction qui a un nombre x quelconque fait correspondre P(X≤x) $\in$ [0 ; 1]

La fonction de répartition de x est R(x) = P(X ≤ x)

● L'espérance mathématique de X

Est le nombre que l'on obtiendrait si on faisait la moyenne des X obtenus en procédant à un grand nombre de tirages sur E, la probabilité de tirer Xi étant Pi.

L'espérance mathématique de X est E(X) = $\sum \mathrm{XiPi}$

Indicateurs de la répartition de X dans E

● La moyenne de X dans E

$\overline{\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{N1X1+N2X2+\cdots\ldots NnXn}}{\mathrm{N}}$ ou bien $\overline{\mathrm{X}} = \mathrm{F1X1} + \mathrm{F2X2} + \cdots . \mathrm{FnXn} = \sum_i \mathrm{FiXi}$ (somme sur i des FiXi)

La moyenne de X est $\overline{\mathrm{X}} = \sum \mathrm{FiXi}$ Si les classes sont des intervalles, Fi fréquence de l'intervalle et Xi milieu de l'intervalle.

à rapprocher de l'espérance mathématique (en général Pi = Fi et E(X) = $\overline{\mathrm{X}}$)

● La variance de X qui est la moyenne des carrés de l'écart à la moyenne de X.

Traduit la dispersion de X autour de la moyenne.
L'écart à la moyenne de Xi est (Xi - $\overline{\mathrm{X}}$). Son carré est (Xi - $\overline{\mathrm{X}}$)^2. Et la moyenne de ces carrés est $\sum \mathrm{Fi}\,(\mathrm{Xi} - \overline{\mathrm{X}})^2$.

La variance de X est V(X) = $\sum \mathrm{Fi}\,(\mathrm{Xi} - \overline{\mathrm{X}})^2$

Il est souvent plus simple de calculer la variance comme la différence entre la moyenne des carrés et le carré de la moyenne

V(X) = ($\sum$ FiXi^2) - $\overline{\mathrm{X}}^2$

● L'écart type

Utile pour caractériser ce qu'on appellera "les lois à densité" est égal à la racine carrée de la variance.

La variance de X est σ(X) = $\sqrt{\mathrm{V(X)}}$

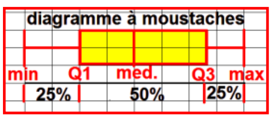
● Propriétés à connaître.

Si a et b sont des nombres quelconques, si X et Y sont 2 variables aléatoires

E(X+Y)= E(X)+E(Y)	**V(X+Y)=V(X)+V(Y)**	**E(aX+b)= aE(X)+b**	**V(aX+b) = a^2 V(X)**	**σ(aX+b) = |a| σ(X)**

Indicateurs de position des classes de X rangées par valeurs croissantes de X

Mode : valeur de X dont la fréquence est optimale.
Si les classes sont formées d'intervalles de valeurs de X, la **classe modale** est celle dont la fréquence par unité de longueur est optimale.
Effectif cumulé N(X < Xi) = somme des effectifs de classes pour lesquelles X < Xi
Fréquence cumulée f(X < Xi) : somme des fréquences de classes pour lesquelles X < Xi
En cumulant l'effectif des classes Σ Ni dans le sens des X croissants, il arrive un moment où je franchis le seuil correspondant à une fraction donnée de la population **k.N** (K fractionnaire < 1). Ce franchissement se produit dans une classe et à cette classe correspond une valeur de X dont le nom dépend du seuil franchi.
Si k = ½ on parle de **Médiane** La médiane est la valeur Xi pour laquelle ni N(X < Xi) ni N(X > Xi) ne sont supérieurs à la moitié de l'effectif.



Si K est exprimé en quarts on parle de **quartiles** (1er, 2e ou 3e quartile: Q1, Q2, Q3)
Si K est exprimé en dixièmes on parle de **déciles** (du 1er au 9e décile)
Si K est exprimé en centièmes on parle de **centiles** (du 1er au 99e centile)
Par exemple, si 5 est le 3e décile, moins de 3/10 de la population a X <5 et moins de 7/10 de la population a x > 5.

La loi binomiale

Le nombre de combinaisons de n éléments p à p peut s'écrire C_n^p ou $\left[{n \atop p}\right]$ nCr ou nCp sur une calculatrice.

Soit une série de **n** tirages identiques dans le but d'observer si un évènement se produit ou ne se produit pas.

- Le nombre X de succès ou d'échecs au cours des n tirages est une variable aléatoire discrète.
- Une telle série de tirages obéit à **la loi B(n,p)** loi binomiale à **n** tirages dont le succès a la probabilité **p**.

Exemples :

- Urne de Bernoulli avec b boules blanches et r boules rouges. n tirages avec remise.
  La probabilité de tirer une blanche au cours d'un tirage est p = b / (b+r). Probabilité de tirer X blanches?
- n naissances prévues en un mois à la maternité. Garçon ou fille ont la probabilité ½ .
  On décide succès = fille. Probabilité de mettre au monde X filles?
- n mises sur la couleur rouge à la roulette..
  Succès = la couleur rouge sort. La probabilité de rouge est 18/37. Probabilité de gagner X fois?

Variable de Bernoulli

B = 1 si succès probabilité **p** (p fréquence du 1) **B = 0** si échec probabilité **q = 1 – p** (q fréquence du 0)

E(B) = p (calcul E(B)=1.p+0.q) **V(B) = pq** (calcul **V(B)=** $\sum f_i(B_i - \overline{B})^2$ =p(1-p)^2 +q(0-p)^2 = pq^2+qp^2 **=pq(q+p)= pq)**

La variable binomiale **X** **indique le nombre de succès** sur n tirages.

Il suffit d'appeler $\mathbf{B_i}$ la variable de Bernoulli liée au résultat du $\mathbf{i^{eme}}$ tirage.
Le nombre **X** de succès sur **n** tirages est **X = B1+…..+Bn.**
Le résultat d'une épreuve de n tirage peut être présenté sous la forme **(B1 , B2 , ……. ,Bn)**
Par exemple pour **n = 7** **(1,1,0,1,0,0,1)** qui donne pour cette série **X = 4** (4 fois 1 et 3 fois 0)

- Chaque issue d'une épreuve de n tirages est un n–uplet (de composantes 0 ou 1) tel que (1, 1 , 0 , 1 , 0, 0 , 1).
- L'univers est un ensemble produit {0,1}X{0,1)x …x{0,1} **Le nombre d'issues possibles est** 2X2X …x 2 = $\mathbf{2^n}$.
- L'évènement **X = x** est l'ensemble des issues qui comportent **x** fois le chiffre 1 et **n–x** fois le chiffre 0.
- **Le nombre des issues (n-uplets) pour lesquelles X = x**

C'est $\left[{n \atop x}\right]$ (combinaisons de n rangs x par x) . Par exemple pour 7 tirages et X = 4 si l'on doit dénombrer toutes les façons de situer les quatre 1 à des rangs différents dans (1, 1 , 0 , 1 , 0, 0 , 1) on va trouver $\left[{7 \atop 4}\right]$.

- **La probabilité d'une issue pour laquelle X = x**

La probabilité d'une issue comportant **x** succès (probabilité **p**) et **n–x** échecs probabilité (**q** = **1– p**) est $\mathbf{p^x q^{n-x}}$ (il suffit de la considérer comme l'intersection de **n** évènements indépendants dont **x** ont la probabilité **p** et **n – x** la probabilité **q**).
Par exemple pour (1, 1 , 0 , 1 , 0, 0 , 1) est aussi la conjonction suivante :

(1 à la 1ere épreuve) ET (1 à la 2^e) ET (0 à la 3^e) ET ….ET (1 à la 7^e). Probabilité **ppqpqqp =** $\mathbf{p^4q^3}$.

- **Donc la probabilité de X = x dans une épreuve comportant n tirages** est **P(X=x)=**$\left[{\mathbf{n} \atop \mathbf{x}}\right]\mathbf{p^x q^{n-x}}$

Produit du **nombre d'issues favorables** par **la probabilité de chacune d'elles**.

Fonction de répartition

$$P(X < x) = \sum_{i=0}^{i=x} \left[{n \atop i}\right] p^i q^{n-i}$$

Caractéristiques

On observe X le nombre de succès (de probabilité p) sur une série de n tirages..

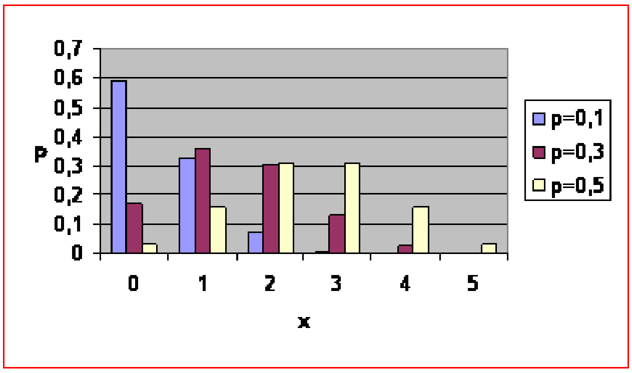
X = Σ Bi (somme de **n** variables de Bernouilli) avec **E(Bi) = p** et **V(Bi) = pq** donc

E(X) = np calcul E(X1+X2)=E(X1)+E(X2) **V(X) = npq** calcul V(X1+X2)=V(X1)+V(X2) **σ(X) =** $\sqrt{npq}$

Loi des fréquences : On observe la variable aléatoire Fx = **X / n** (la fréquence de X sur n tirages).

E(Fx)=p **V(Fx) =**$\frac{pq}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$ **σ(Fx) =** $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ On note que **E(**$\frac{X}{n}$**) =** $\frac{E(X)}{n}$ et **V(**$\frac{X}{n}$**) =** $\frac{V(X)}{n^2}$

Exemples de lois binomiales pour n = 5



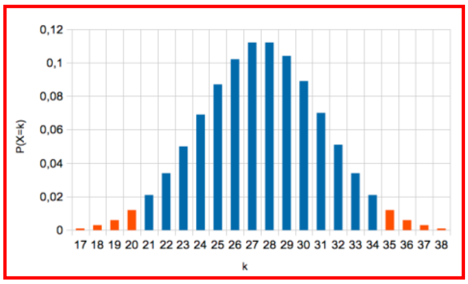
X nombre de succès peut varier de 0 à 5.
Les 3 graphiques montrent la probabilité de X variable binomiale pour p = 0,1 , p=0,3 et p = 0,5.
Quand la probabilité de l'échec est la même que la probabilité de réussite (0,5), le graphique est symétrique par rapport à E(X) qui est 2,5.
2 échecs aussi probables que 3, 1 aussi probable que 4, 0 aussi probable que 5.

Echantillonnage

Un **échantillon** est un sous ensemble prélevé dans une population aux fins de déterminer la valeur approchée de la fréquence d'un caractère dans la population sans avoir à dénombrer la totalité de cette dernière.
On dit qu'on procède à un **sondage**.

Intervalle de fluctuation au seuil de 95%

Soit un caractère de fréquence p dans la population
Soit X le nombre de fois que ce caractère est présent dans un échantillon de taille n
Soit f la fréquence de ce caractère dans un échantillon de taille n. $f = \frac{X}{n}$
X entre a et b (a et b entiers) est équivalent à f entre $\frac{a}{n}$ et $\frac{b}{n}$.



Dans une loi binomiale, le diagramme qui montre la probabilité de X = K en fonction de K a l'allure ci - contre.
Pour évaluer la probabilité de X ≤ S , il faut ajouter les probabilités de X=0 , X= 1, X=3 jusqu'à X =S.
Evidemment cette probabilité va être très faible pour S très petit et va croître jusqu'à 1 quand S atteindra la valeur maximale c'est-à-dire n.

On peut choisir
a tel que **a soit le plus petit possible** et que **P(X≤ a) ≥ 0,025** (sur le diagramme on trouve a =21)
b tel que **b soit le plus petit possible** et que **P(X≤ b) ≥ 0,975** (sur le diagramme on trouve b =34)
Si P(X≤a)=P1 , P(X≤b) = P2 et a<b , on a P(X entre a et b) = P2 –P1
Alors comme 0,975 – 0,025 = 0,95 on a **P(a ≤ X ≤ b) ≥ 0,95** et **$P(\frac{a}{n} \leq f \leq \frac{b}{n}) \geq 0,95$**
Autrement dit dans notre exemple, la probabilité pour que X soit entre 21 et 34 est 95%.
Pourquoi 0,025 et 0,975? Pour que la probabilité de X dans chacune des zones rouges soit aussi proche que possible de 2,5% tout en restant inférieure à ce chiffre. (Ecrêtage symétrique des valeurs extrêmes).

Valeur approchée de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% sous certaines conditions

Soit un caractère de fréquence p dans une population quelconque.
Cette loi n'est valable que si **0,2≤p≤0,8** .
Prélevons des échantillons de la population d'effectif n.
Cette loi n'est valable que si **n ≥ 25**.
Soit f la fréquence du caractère observé dans un échantillon.
Dans **95%** des échantillons on doit avoir **$f \in [p-\frac{1}{\sqrt{n}} , p+\frac{1}{\sqrt{n}}]$**

Peut- on accepter le résultat d'un sondage?

Remarque: calculer un intervalle de fluctuation suppose qu'on connait la loi binomiale qui fixe la configuration de la population, puisqu'elle est nécessaire au calcul des P(X=K) qui permet de déterminer les P(X ≤K). Or à quoi peut servir un sondage si ce n'est à déterminer p?
Par exemple à évaluer la validité d'un échantillon. On prête une valeur à p , on évalue les probabilités selon la loi binomiale B(n,p) où n est la taille de l'échantillon puis on calcule l'intervalle de fluctuation et on vérifie que la valeur donnée par l'échantillon figure bien dans les limites de cet intervalle.
Si c'est le cas on accepte l'échantillon.
Sinon on le rejette.