LES PRINCIPALES LOIS DE PROBABILITES

Table des matières

Variables aléatoires

V.a. Discrète

P(X = x) = p(x)
Fonction de répartition : F(x) = P(X < x)

V.a. Continue

La probabilité de X = x est nulle. P(X = x) =**0** (X prend une infinité de valeur)
Fonction de répartition : F(x) = P(X < x)
P(a ≤ X < b) = F(b) – F(a)
Densité de probabilité : **f(x)** = F'(x) Si F(X) est dérivable

f(x) = $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{P(x < X < x+\Delta x)}{\Delta x}$ = C'est bien une **densité** de probabilité

f(x) homogène a une probabilité par unité de longueur au point considéré .
f(x) est positif ou nul .
Si X peut prendre toutes les valeurs de R

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ = 1 cette intégrale est égale à P(–∞ < X < +∞) qui par définition = 1

Si X varie entre A et B
$\int_{A}^{B} f(x)dx$ = 1

V.a. à 2 dimensions

Discrète :

Pxy = P (X = x et Y =y)
Distributions marginales : **Px = P(X = x)** et **Py = P(Y = y)**
Distributions conditionnelles : **P(X = x | Y = y) =**$\frac{P_{xy}}{P_y}$ et **P(Y = y | X = x) =** $\frac{P_{xy}}{P_x}$

Les variables X et Y sont indépendantes si **Pxy = Px . Py**
Fonction de répartition : **F(x,y) = P(X < x et Y < y)**

Continue :

On définit la probabilité pour que (x,y) soit dans un rectangle **P(a < X <b , c < Y < d)**
Si F(x,y) dérivable par rapport à x et y :
Densité de probabilité **f(x,y) =** $\lim_{\Delta x \to 0\ \Delta y \to 0} \frac{P(x<X<x+\Delta x\ ;\ y<Y<y+\Delta y)}{\Delta x \Delta y}$

Espérance mathématique

L'espérance mathématique est une moyenne des valeurs possibles de la V.a pondérées par leur probabilité.
V.a. discrète **E(X) = ∑ XiPi**
V.a. continue **E(X) = ∫ xf(x)dx** (avec f(x) densité de probabilité)

E(X+Y) = E(X) + E(Y)
Si X et Y sont indépendantes **E(XY) = E(X)E(Y)**
E(aX +b) = aE(X) + b

Variance

C'est l'espérance mathématique du carré de l'écart à l'espérance

$V(X) = E([X - E(X)]^2)$

Ecart type = $\sqrt{V(X)}$

Moment d'ordre q $m_q = E(X^q)$ $\sum (X_i)^q P_i$ ou $\int x^q f(x)dx$

$V(X) = m_2 - m_1^2$
Si X et Y indépendantes **$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$**
Si X et Y non indépendantes : **$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$**
Avec **$Cov(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)])$**

Moment centré d'ordre q $M_q = E([X - E(X)]^q)$
$V(X) = M_2$.

La loi Binomiale

Une série de **n** épreuves .
Seules possibilités réussir (probabilité **p**) ou échouer (probabilité **q = 1 – p**)
Variable aléatoire discrète : en général nombre de succès ou d'échecs.
Une telle série d'épreuves obéit à **la loi B(n,p)**
Loi binomiale à **n** épreuves dont le succès a la probabilité **p**.

Exemples :

∗ Urne de Bernouilli avec p boules blanches et q boules noires. n tirages avec remise.
Probabilité de tirer X blanches. On décide par exemple succès = boule blanche. Probabilité p / (p+q).
∗ n naissances dans une famille. Garçon ou fille ont la probabilité ½ .
Probabilité de mettre au monde X filles. On décide succès = fille.
∗ n mises sur la couleur rouge à la roulette. Probabilité de gagner X fois.
Succès = la couleur rouge sort . La probabilité de rouge est 18/37.

Variable de Bernouilli X

X = 1 si succès probabilité **p**
X = 0 si échec probabilité **q = 1 – p**
E(X) = 1.p +0.q = p
V(X) = p – p^2 = p(1–p) **= pq**

La variable binomiale X (qui indique le nombre de succès) est une somme de variables de Bernouilli.
Il suffit d'appeler X1 , X2 , ……Xn la variable de Bernouilli liée au résultat de chacune des n épreuve.
Le nombre X de succès sur n épreuves est X = X1+…..+Xn.
Le résultat d'une série de n épreuves peut être présenté sous la forme **(X1 , X2 , ……. ;Xn)**
Par exemple pour **n = 7** **(1101001)** qui donne pour cette série **X = 4** (4 fois 1 et 3 fois 0)
∗ Chaque série de résultats d'épreuves est un n–uplet de **{ 0 ; 1 }^{n}** tel que (1, 1 , 0 , 1 , 0, 0 , 1).
∗ **Ω_n** est l'ensemble des séries de résultats de n épreuves
il comporte 2 X 2 X 2 x …x 2 = **2^n** séries possibles.
∗ L'évènement **X = x** est l'ensemble des séries qui comportent **x** fois le chiffre 1 et **n–x** fois le chiffre 0.

∗ Le nombre des séries de résultats pour lesquelles X = x

C'est C_n^x (combinaisons de n rangs x par x)
Par exemple pour 7 épreuves et X = 4 si l'on doit dénombrer toutes les façons de situer les quatre 1 à des rangs différents dans (1, 1 , 0 , 1 , 0, 0 , 1) on va trouver C_7^4 .

∗ La probabilité d'une série de résultats pour laquelle X = x

La probabilité d'une série comportant **x** succès (probabilité **p**) et **n–x** échecs probabilité (**q** = **1– p**) est
$p^x q^{n-x}$ (il suffit de la considérer comme l'intersection de **n** évènements indépendants dont **x** ont la probabilité **p** et **n – x** la probabilité **q**).
Par exemple pour (1, 1 , 0 , 1 , 0, 0 , 1) est aussi la conjonction suivante :
(1 à la 1ere épreuve) ET (1 à la 2^e) ET (0 à la 3^e) ET ….ET (1 à la 7^e)
Probabilité **ppqpqqp = p^4q^3**.

∗ Donc la probabilité de X = x dans une série de n épreuves est

P(X = x) = C_n^x **$p^x q^{n-x}$**
Produit du nombre de résultats favorables par la probabilité de chacun d'eux.
Par exemple pour 4 épreuves à pile ou face (p = q = ½) on peut calculer la probabilité pour que X (nombre de piles) prenne toutes les valeurs possibles :

Valeurs de X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Probabilité	$C_4^0(\frac{1}{2})^4$ $\frac{1}{16}$	$C_4^1(\frac{1}{2})^4$ $\frac{4}{16}$	$C_4^2(\frac{1}{2})^4$ $\frac{6}{16}$	$C_4^3(\frac{1}{2})^4$ $\frac{4}{16}$	$C_4^4(\frac{1}{2})^4$ $\frac{1}{16}$

Fonction de répartition

$$P(X < x) = \sum_{0}^{x-1} C_n^i \quad p^i q^{n-i}$$

Si la variable est le nombre de tirages ayant produit l'évènement attendu

On observe X est le nombre de tirages ayant donné lieu au même type d'évènements.

$X = \sum Xi$ (somme de n variables de Bernouilli) avec **$E(Xi) = p$** et **$V(Xi) = pq$** donc

$E(X) = E(X1+X2+\ldots Xn) = n.E(X1) = np$
$V(X) = V(X1+X2+\ldots Xn) = n.V(X1) = npq$
$\sigma = \sqrt{npq}$

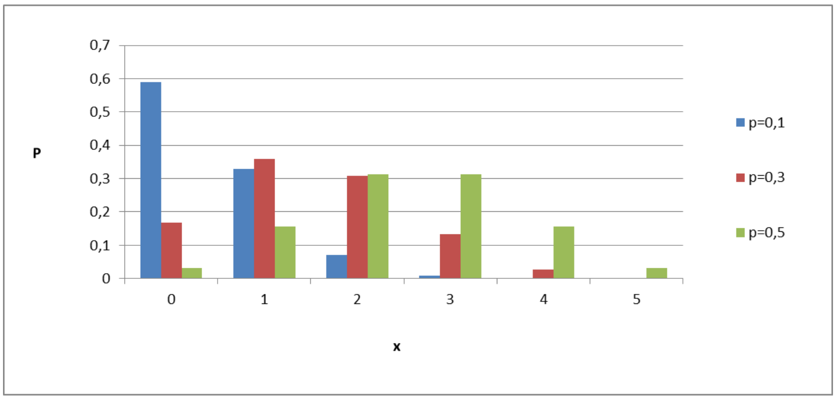
Si la variable est la fréquence de l'évènement

On observe X / n la fréquence d'un type d'évènement.

$$E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{np}{n} = p$$

$$V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}V(X) = \frac{pq}{n}$$

Quelques exemples pour n = 5 (X varie de 0 à 5) , p variant de 0,1 (en bleu) à 0,5 (en vert)



Seule la loi B(5 ; 0,5) est symétrique le maximum de probabilité correspondant à X = 2 ou 3 .
Plus p diminue, plus le maximum de probabilité évolue vers les petites valeurs de X et plus la probabilité des grandes valeurs de X tend à devenir nulle rapidement.
C'est normal car les succès sont de moins en moins probables.

La loi hypergéométrique

Série de n épreuves avec pour seule alternative le succès ou l'échec (comme pour la loi binomiale)
MAIS : la probabilité du succès **p(r)** varie avec le rang **r** de l'épreuve.
Variable aléatoire discrète : en général nombre de succès ou d'échecs.

Exemple type : les **tirages sans remise** encore appelés tirages exhaustifs dans une **population d'effectif N** . (On ne remet pas la boule tirée dans l'urne après tirage)
On peut considérer que les paramètres de la loi hypergéométriques sont
N l'effectif initial
F l'effectif initial favorable à la réussite
n le nombre de tirages
Et on parle de loi **H(N , F, n)**

∗ On utilise la même variable aléatoire **X** que pour la loi binomiale.
Par exemple **X** = nombre de boules noires tirées après **n** tirages dans une urne qui contient initialement **F** noires et **N –F** blanches.

∗ Le dénombrement des séries de résultat pour lesquelles **X = x** est le même C_n^x
Je numérote les épreuves par leur rang 1, 2 , ...n et je choisis parmi ces **n** rangs un ensemble de **x** rangs qui auront donné lieu à la réussite. Combien de possibilités de choix ? C_n^x

∗ Toutes les séries donnant **X = x** ont la même probabilité **P_x** mais celle-ci doit être évaluée une fois

∗ **P(X = x) = C_n^x P_x**

Exemple

Une urne contient 5 boules noires et 10 boules rouges (en tout 15 boules) .
5 tirages (n = 5) . Probabilité de 3 noires (X = 3) ?

Probabilité de **11010** $= \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{9}{11}$

1er tirage il y a 5 boules noires sur 15
2^{e} tirage il reste 4 boules noires sur 14
3^{e} tirage il y a 10 boules rouges sur 13
4^{e} tirage il reste 3 boules noires sur 12
5^{e} tirage il reste 9 boules rouges sur 11.

Probabilité de **00111** $= \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11}$ = Probabilité de **11010**

Pourquoi cette probabilité ne change – t – elle pas ?
Parce que les dénominateurs rendent compte de la diminution du nombre de boules dans l'urne qui va toujours passer de 15 à 11 au cours de 5 tirages. Quant aux numérateurs, ils rendent compte de l'évolution du nombre de boules de chaque couleur. Ces nombres vont forcément évoluer de la même façon même si ce n'est pas au même moment et donc d'un numérateur à l'autre on a seulement permuté des facteurs semblables.

Dans ce cas, la probabilité de **X = 3** est donc $C_n^x \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11}$.

Raisonnons autrement :

Il revient au même de tirer les **n** boules une par une ou de tirer **n** boules et de compter parmi elles les boules noires.
Parmi les **N** boules, combien de séries différentes de **n** puis je tirer ?
C_N^n Cas possibles équiprobables.
Parmi les **F** noires combien de séries de **x** noires puis je tirer ?
C_F^x
Pour chaque série de **x** noires,
combien de séries de **n – x** blanches parmi **N – F** ?
C_{N-F}^{n-x}
Donc parmi les cas possibles, combien sont formés de **x** noires et **n-x** blanches ?
$C_F^x C_{N-F}^{n-x}$

On peut donc dire que si un réservoir contient N éléments, F possédant le caractère λ, N–F ne le possédant pas
La probabilité, lors de n tirages sans remise dans le réservoir d'avoir x éléments possédant le caractère λ est

$$\boxed{P(X = x) = \frac{C_F^x C_{N-F}^{n-x}}{C_N^n}} = \frac{\text{Combinaisons de } F \;\; x \text{ à } x \;\; \text{multiplié par} \;\; \text{Combinaisons de } N\text{–}F \;\; n-x \text{ à } n-x}{\text{Combinaisons de } N \text{ nombre total } n \text{ à } n \text{ (tirages de } n \text{ éléments)}}$$

Caractéristiques :

E(X) = np (comme pour la loi binomiale)

V(X) = npq $\frac{N-n}{N-1}$ (**N** effectif total avant tirage et **n** nombre d'épreuves)

De la loi Hypergéométrique à la loi binomiale.

Si **N** très grand devant **n** et si **p** moyen, pas trop voisin de **0** ou **1** : On peut faire une approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale. **n < N / 10 , p=X/N**

Loi de Poisson

Processus de Poisson

Apparition d'évènements aléatoires dans le temps ou dans l'espace.

∗ La probabilité de réalisation d'un évènement **E** au cours d'une petite période de temps Δt ou sur une petite portion d'espace ΔL , ΔS , ΔV que nous appellerons Δz est proportionnel à Δz .

P(E)= pΔz

∗ La probabilité d'apparition de deux évènements sur Δz très petit est négligeable

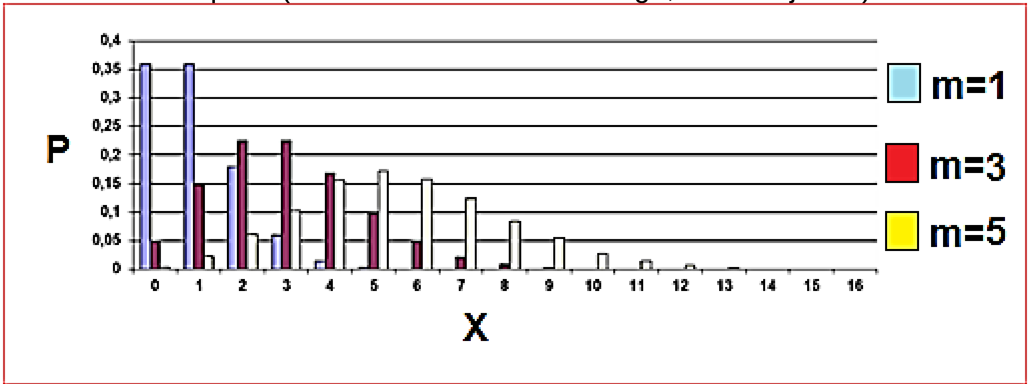
Appels téléphoniques dans un central, pannes de machines, arrivées à un péage, particules observées avec un appareil, points répartis au hasard sur une droite, captation de rayon cosmiques.

∗ Variable discrète **X** = nombre d'évènements observés sur **Z** (temps ou espace)

∗ **P(X = x) =** $\dfrac{e^{-pZ}(pz)^x}{x\,!}$ ou $\dfrac{e^{-m}m^x}{x\,!}$ si l'on pose **m = pZ**

Des tables donnent la valeur de P(X = x) selon la valeur de x pour différents valeurs de m

En voici 3 exemples. (m = 1 en bleu m= 3 en rouge, m=5 en jaune).



La loi de poisson comme limite d'une loi binomiale

Prenons une loi binomiale **B(n, p)** avec **p** petit (évènement rare) et **n** grand (épreuves très nombreuses).

Faisons en sorte que **np** soit de l'ordre de quelques unités (3 ou 4)

E(X) = np donc au cours des n épreuves, l'évènement espéré se produira en moyenne 3 ou 4 fois.

Si l'on imagine la succession rapide des épreuves pendant un laps de temps relativement court , l'observateur retrouve à peu prés les conditions d'un processus de poisson de paramètre **m = np**.

A partir de **B(n,p)** on a

P(X=x) = $C_n^x\, p^x (1-p)^{n-x} = \dfrac{n(n-1)\ldots.(n-x+1)}{x!} \cdot \dfrac{(np)^x}{n^x} \cdot \left(1-\dfrac{np}{n}\right)^{n-x}$

P(X=x) = $\dfrac{n(n-1)\ldots.(n-x+1)}{n^x} \cdot \dfrac{(np)^x}{x!} \cdot \left(1-\dfrac{np}{n}\right)^{n-x}$

Et comme $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ Si **n** ➔ **+∞** et **p** ➔ **0** de telle sorte que **np** ➔ **m**

on remarque qu'à la limite $\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-x}$ est équivalent à $e^{-m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^x$ alors **P(X = x)** ➔ $\dfrac{e^{-m}m^x}{x\,!}$

De la loi binomiale à la loi de poisson

On a donc bien à la limite la loi binomiale **P(X = x)** ➔ la loi de poisson $\dfrac{e^{-m}m^x}{x\,!}$

On considère que c'est le cas dés que **n > 50** et **np < 5**

Caractéristiques de la loi de Poisson

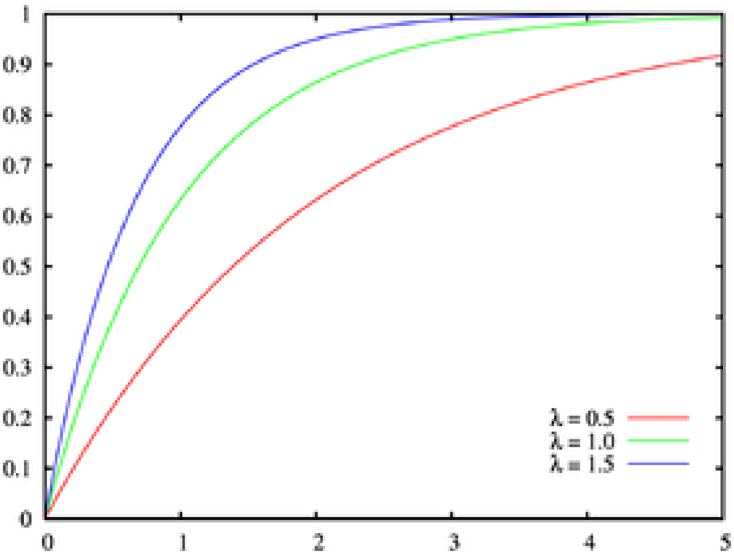
E(X) = m

V(X) = m

Loi exponentielle

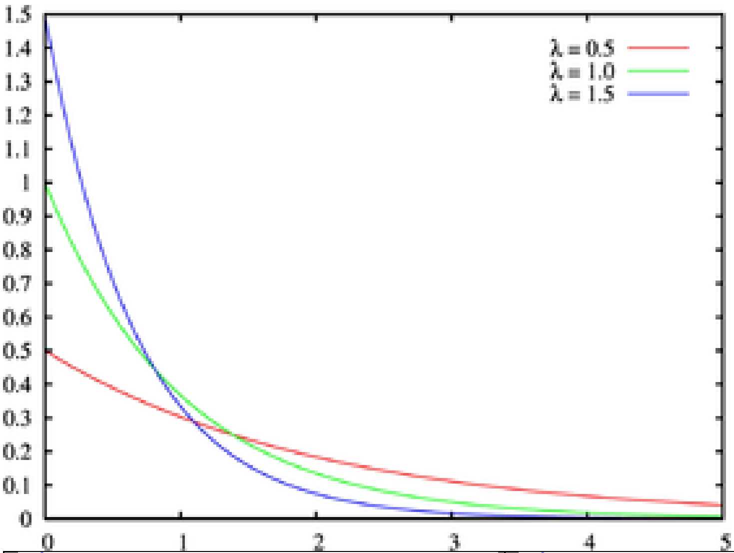
Supposons qu'un objet a **une durée de vie sans vieillissement**.
Si on interprète X comme la durée de vie d’un appareil, cette propriété est synonyme de l'égalité :
$P_{X\geqslant t}$ (X⩾h+t)=P (X⩾t) qui signifie que la probabilité que l’appareil fonctionne encore au-delà du temps h+t sachant qu’il fonctionne encore à l’instant h est égale à la probabilité que l’appareil fonctionne au-delà du temps t .
Autrement dit d'après les probabilités composées P(X⩾h+t)=P(x>h).P (X⩾t)
Si on appelle F(t) est la probabilité que l'objet ait une durée de vie supérieure à t

F(h+t) = F(h) . F(t) autrement dit
$\frac{F(h+t)}{F(t)} = F(h)$ ce qui est caractéristique d'une fonction exponentielle $F(t)=e^{kt}$
Avec k négatif puisque la probabilité est inférieure à 1. On pose k = –λ.
On en déduit que



Fonction de répartition
$P(t < x) = [-e^{-\lambda t}]_0^x$ = 1 – $e^{-\lambda x}$
Espérance E(x) = $\frac{1}{\lambda}$
Variance V(x) = $\frac{1}{\lambda^2}$
Écart type σ(x) = $\frac{1}{\lambda}$
Médiane (t tel que P(x>t) = 0,5) $\frac{ln\,(2)}{\lambda}$

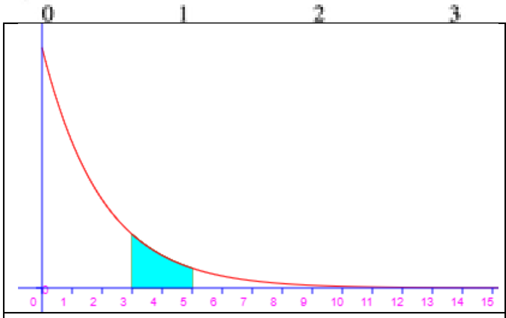
La densité de probabilité est la dérivée par rapport à t de la fonction de répartition.

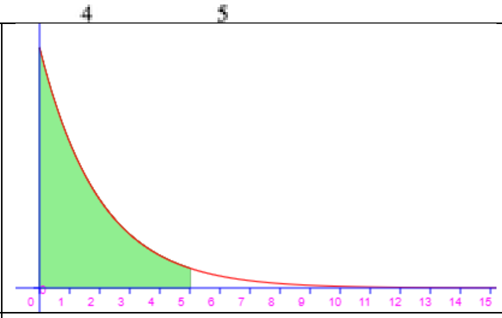


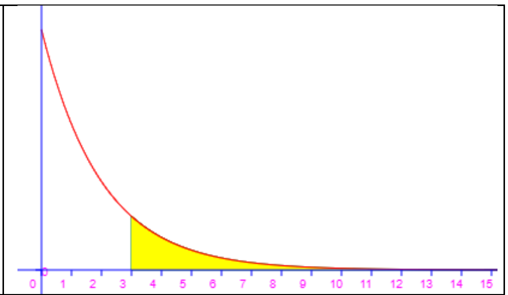
Densité de probabilité :
F(x) = $\lambda e^{-\lambda t}$

Primitive
$-e^{-\lambda t}$

Intégrale de 0 à ∞
$[-e^{-\lambda t}]_0^\infty$ = 1
C'est bien une densité de probabilité.


Pr(X entre 3 et 5)


Pr(x<5)


Pr(x>3)

Loi normale

Loi normale, loi de Laplace – Gauss , loi de Gauss.

C'est la loi suivie par une variable aléatoire continue dont la moyenne (l'espérance mathématique) et la médiane coïncident avec la valeur la plus probable (le mode).
De plus les écarts à la moyenne doivent être symétriques par rapport à cette dernière et la probabilité de **X** doit diminuer de façon significative quand on s'écarte de la moyenne, puisque, si **σ** est l'écart type et M l'espérance mathématique, la probabilité pour que **X** soit compris entre **M-2σ** et **M+2σ** doit être de l'ordre de **95%**.

Caractéristiques de la loi normale

Dans ce qui suit le signe ∫ représente une intégration sur **R** de –∞ à + ∞

Densité de probabilité

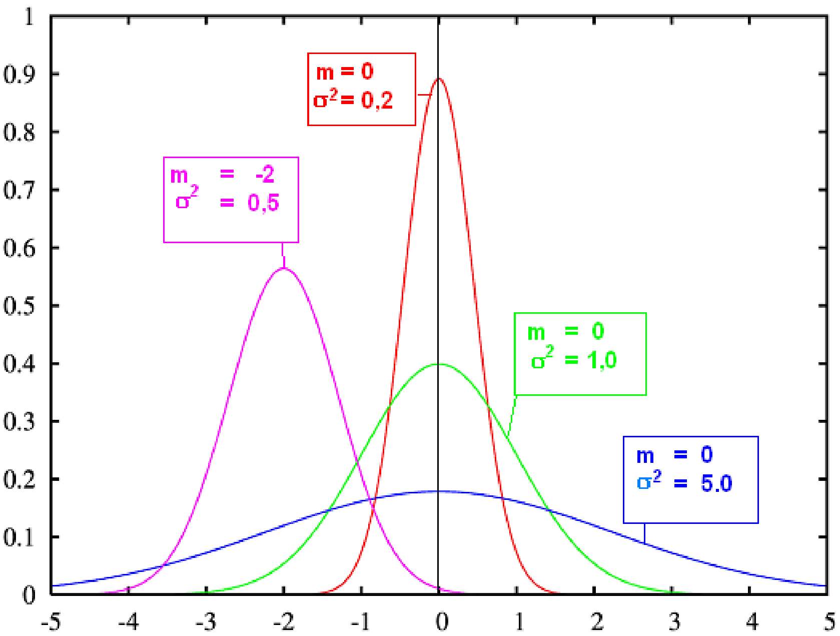
f(x) $= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ en posant $T = \frac{x-m}{\sigma}$ la loi devient f(T) = $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{T^2}{2}}$

et nous savons que si **ϕ (T)=** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{T^2}{2}}$ on a **∫ ϕ (T) dT = 1** (Gauss)**.**

Donc la fonction ϕ peut être considérée comme une densité de probabilité.
Alors, il en va de même de la fonction **f(X).** D'ailleurs, on a **f(x) = ϕ (x)** si l'on prend **σ = 1 et m = 0 .**

La loi ϕ (x) est appelée loi normale, centrée, réduite et notée N(0,1)

Normale (**N** **(0,1)**) parce que sa densité de probabilité est de type f(x)
Centrée parce que lorsque **m = 0** (**N(0,1)**) le graphe de la loi est symétrique par rapport à l'axe des y
Réduite parce que le choix de **σ = 1** (**N(0,1)**) et de **m = 0** a simplifié son expression.



Voici le graphe de la loi N(0,1) **en vert** accompagné d'autres graphes de lois normales, centrées (m = 0) ou non (m=–2).
On voit que **m** fixe l'emplacement du maximum de la distribution tandis que **σ** module la dispersion des valeurs autour de la moyenne.
Plus **σ** est petit plus la courbe est effilée vers le haut et la population concentrée autour de la moyenne. Plus **σ** est grand et plus la courbe est évasée et aplatie. .

Espérance mathématique de N(m , σ) = m

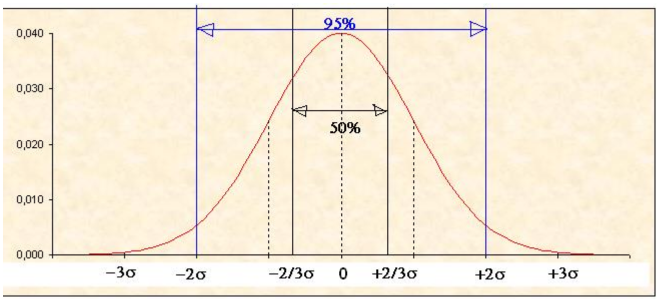
Médiane de N(m , σ) = m

Mode de N(m , σ) = m (valeur la plus fréquente)

Ecart type de N(m , σ²) = σ

Les tables de la loi normale

Comme le montre le dessin ci-dessous, les répartitions gaussiennes sont telles que
P(m –0,66σ < x < m + 0,66σ) ≈ 50% ce qui veut dire qu'on trouve 50% de l'aire située sous la courbe et au dessus de l'axe des x entre les droites d'équation x = m – (2/3)σ et x = m + (2/3)σ
P(m – 2σ < x < m + 2σ) ≈ 95% Ce qui veut dire que pour 95% de la population le caractère X se trouve entre ces deux valeurs.



Si T = $\frac{x-m}{\sigma}$ et r % le risque d'estimation d'un intervalle contenant T

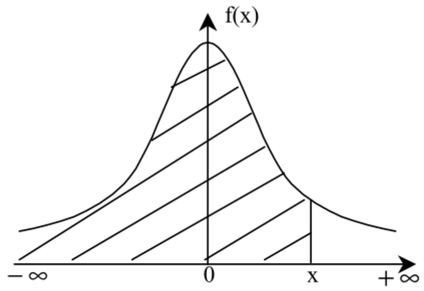
Des tables (inversibles) donnent la valeur **A** telle que **P(–A < T < A) ≥ 1– r%** en fonction de **$1 - \frac{r}{2}$%.**

Ou, ce qui revient au même la probabilité de P(T < A) en fonction de A.

Par exemple si r = 5% , on cherche 1 - $\frac{r}{2}$% = 0,9750 dans la table et on trouve A = 1,9 +0,06 = 1,96

D'où on tire que P (–1,96 < T < 1.96) ≥ 95% autrement dit **T compris entre – 1,96 et + 1,96 au risque de 5%.**

On en déduit que X est compris entre m – 1,96σ et m + 1,96σ au risque de 5%.



T suit une loi N(0,1) .
La table donne P(T ≤ x) en fonction de x qui varie de 0 à 3,5.

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

Si on cherche la probabilité de la plage où se situe T

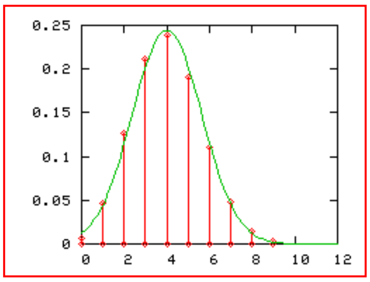
■ P(T < 1,96) on trouve directement 0,9750 dans la table soit 97,5%.
Et on a immédiatement P (T > 1,96) = 1– 0,9750 = 0, 025 = 2,5%
■ P(T > 2) c'est 1 – P (T <2) = 1 – 0,9772 = 0, 00228
■ P (T ∈ [– x, + x]) comme P(–1,96 < x < +1,96) c'est P(T< 1,96) – P(T>1,96) = 0,9750 – 0,0250 = 0,95
■ P(1,96 < T < 2) = P(T<2) – P(T<1,96) = 0,9772 – 0,9750 = 0,0022.

Si on cherche dans quelle plage se situe T avec une probabilité connue

On exploite la table à l'envers
■ Si P(T < X) ≤ 85,31% → on cherche le nombre le plus proche de 0,8531 et il correspond à X = 1,05
■ Comment choisir X pour avoir T entre –X et +X au risque de 5% ? Autrement dit P(–X < T < +X) = 95%.
La probabilité en dehors de l'intervalle doit être de 5% et donc 2,5% du côté positif et 2,5% du côté négatif.
On doit donc avoir P(T < X) =97,5% = 0,9750. Dans la table on trouve X = 1,96.
■ P(T < X) < 40% . Problème 40% ne figure pas dans la table mais on sait
1. Que X est négatif
2. Que P(T < –X) = 1–40% = 60% ce qui donne –X = 0,26 et X = –0,26.

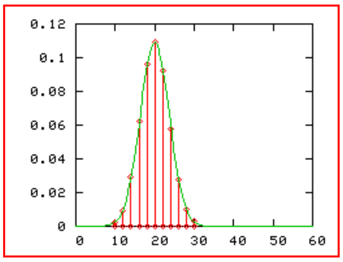
Approximation d'une loi binomiale B(n,p) par une loi normale

Cette approximation est d'autant plus judicieuse que le nombre d'épreuves **n** est grand et que la probabilité **p** n'est pas trop éloignée de ½.



sur ce dessin
En rouge le diagramme en bâtons de la loi **B(12, 1/3)**
On calcule que :
m = np = 4 , V = npq = 8/3

Et en vert la courbe de la loi **N(4,** $\sqrt{\frac{8}{3}}$)



sur ce dessin
En rouge le diagramme en bâtons de la loi **B(60, 1/3)**
On calcule que :
m = np = 20 , V = npq = 40/3
Et en vert la courbe de la loi **N(20,** $\sqrt{\frac{40}{3}}$)

De la loi binomiale à la loi normale

On considère que l'ajustement des deux lois est convenable lorsque **n, p , q** de la loi binomiale sont tels que **npq > 10**

Somme de variables aléatoires normales

Soit la famille de v.a. gaussiennes : { $\mathbf{X}_i$ de moyenne $\mathbf{m}_i$ et de variance $\mathbf{V}_i$ }
Alors, la variable $\mathbf{\Sigma X}_i$ est gaussienne de moyenne $\mathbf{\Sigma m}_i$ et de variance $\mathbf{\Sigma V}_i$

Loi Log – normale

Définition : Une variable aléatoire X à valeurs dans] 0 , + ∞ [suit la loi Log - normale de paramètres N(m,σ) si Y=log X suit la loi N(m,σ) .

De **f(y)** = $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}$

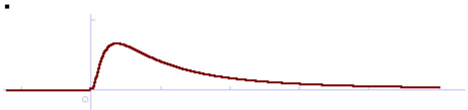
On déduit la densité de X après changement de variable Y = Log X :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - m}{\sigma}\right)^2\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

X admet alors une espérance et une variance

$$E(X) = e^{m+\sigma^2/2} \text{ et } V(X) = e^{2m+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right).$$

Courbe représentative de la densité :



Densité de la loi log-normale

Ex : le nombre de mots dans une phrase suit approximativement une loi log - normale.
La **loi du χ^2 de Pearson** (lire Khi carré) et la **loi de Student** sont des lois dérivées de la loi normale qui vont faire l'objet d'une étude particulière.

La loi du χ^2 de Pearson

La **loi du χ²** (prononcer *khi-deux* ou *khi carré*) est une loi à densité de probabilité. Cette loi est caractérisée par un paramètre dit *degrés de liberté* à valeur dans l'ensemble des entiers naturels (non nuls).

Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée et réduite, alors par définition la variable *X*, telle que $\mathbf{X} = \sum_1^n X_i^2$ (X est souvent appelée χ^2) suit une loi du khi-2 à *n* degrés de liberté.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi du χ² à n degrés de liberté, on notera X^2 (n) la loi de X .

Alors la densité de X est une expression faisant intervenir la fonction Gamma d'Euler

L'espérance mathématique de *X* vaut ***n*** sa **variance** vaut **2*n***

Tables : il existe des tables donnant p(X > x) selon la valeur de n .

De la loi du χ2 à la loi normale :

Lorsque **n > 30** on admet que si **X** suit une loi du **χ2** alors $\sqrt{2X} - \sqrt{2n-1}$ suit une loi normale centrée réduite

.

La somme des carrés de **m** variables aléatoires normales liées par **p** relations suit une loi du **χ2** à **n = m – p** degrés de libertés.

Test du χ2

On utilise ce test pour juger

∗ De l'adéquation d'une population à une distribution type (exemple loi de poisson)

∗ De l'homogénéité de 2 populations soupçonnées de suivre une même loi

∗ De l'indépendance de deux populations

Méthode

On répartit les valeurs de l'échantillon (de taille n) dans **k** classes distinctes et on calcule les effectifs de ces classes. Si l'on regroupe certaines classes pour les doter d'un effectif plus important, **k** diminue en conséquence.

Appelons $\mathbf{o_i}$ (i=1,...,k) les effectifs observés et $\mathbf{e_i}$ les effectifs théoriques.

On calcule $$Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

La statistique **Q** donne une mesure de l'écart existant entre les effectifs théoriques attendus et ceux observés dans l'échantillon. En effet, plus **Q** sera grand, plus le désaccord sera important. La coïncidence sera parfaite si Q=0.

Le degré de liberté (d) de la variable soumise au test ($\mathbf{o_i}$) est obtenu en soustrayant à **k** le nombre de relations entre les valeurs observées qui ont été utilisées dans le paramétrage de la loi de référence.

Par exemple si on a une relation de type $\mathbf{\Sigma\, o_i = n}$ (loi **B(n,p)**) le degré de liberté devient **k – 1**

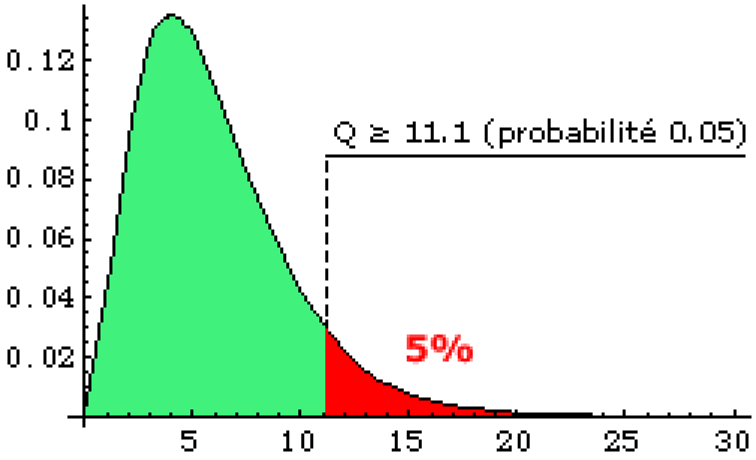
Si, de plus on a eu besoin de calculer **la moyenne m** des $\mathbf{o_i}$ pour tester l'adéquation à la loi **B(n,p)** (p déduit de m) ou **P(m)** (m paramètre de la loi de Poisson) le degré de liberté deviendra **k – 2.**

La table donne, pour d degrés de libertés la probabilité pour que l'adéquation de Oi et Ei soit bonne si Q dépasse un seuil donné. Par exemple si Q dépasse 11,07 l'adéquation a 5% de chances d'être bonne et donc 95% de chances d'être mauvaise.

Pour 5 degrés de libertés	
P(Q> q)	**q**
0.9	**1,61**
0.8	**2,34**
0.7	**3**
0.5	**4,35**
0.3	**6,06**
0.2	**7,29**
0.1	**9,23**
0.05	**11,07**
0.02	**13,39**
0.01	**15,08**

En situant **Q d**ans l'échelle des valeurs de q on sait que l'adéquation a entre x% et y% de chances d'être bonne. Plus le seuil dépassé par Q est bas, plus la probabilité en face de ce seuil est grande, plus l'adéquation de la loi à la série est judicieuse

Exemple



On a lancé un dé 90 fois et on a obtenu les issues 1 à 6 (k=6) avec les effectifs suivants: 12, 16, 20, 11, 13, 18. Si le dé n'est pas pipé (notre hypothèse), on attend comme effectifs moyens théoriques 15 pour toutes les issues.

$$Q = \frac{(12-15)^2}{15} + \frac{(16-15)^2}{15} + \frac{(20-15)^2}{15} + \frac{(11-15)^2}{15} + \frac{(13-15)^2}{15} + \frac{(18-15)^2}{15} = \frac{64}{15} = 4.266$$

Pour k-1=5 degrés de liberté on trouve dans la table Q entre les valeurs

0.7	**3**
0.5	**4,35**

Ce qui signifie que la probabilité pour que Q soit une valeur convenable est un peu supérieure à 50% . L'adéquation de la loi à la série n'est pas fameuse. Mais il faudrait que Q soit supérieur à 11.07 pour qu'elle ait 95% de chances d'être mauvaise..

Variations

Dans ce cas, on connait l'effectif théorique de chaque classe qui en fonction des probabilités (1/6) doit être 15 occurrences d'une face de dé sur 90 lancers.
15 est l'hypothèse "adéquation à la loi de probabilité" (effectif théorique e_i).

Dans d'autres cas, il faudra juger par exemple **l'adéquation d'un échantillon de données à une loi de poisson** et après avoir calculé la moyenne m de la variable aléatoire X sur l'échantillon observé, il faudra utiliser la loi de poisson pour calculer un effectif théorique qui devrait être
selon la valeur de X, m. P(X=x)= m $\frac{e^{-m}m^x}{x!}$.
Et l'utilisation de m implique que le degré de liberté de la table obtenue diminue d'une unité.

Enfin, on peut nous demander de **tester la dépendance de 2 variables**, par exemple la dépendance d'une variable qualitative pouvant prendre trois états (intention de vote = oui, non abstention) par rapport à 3 classes d'une population (par exemple 18-25 ans, 26-50 ans, plus de 50 ans).
Les résultats sont présentés dans un tableau de ce type

	Classe 1	Classe 2	Classe 3	Total
population 1	n_{11}	n_{21}	n_{31}	**E1**
population 2	n_{12}	n_{22}	n_{32}	**E2**
population 3	n_{13}	n_{23}	n_{33}	**E3**
Total	**N1**	**N2**	**N3**	**N**

Nos données sont les effectifs n_{ij} (Tableau 3 X 3 généralement LXC)
Le degré de liberté est (L-1) x (C-1) ici (3–1) x (3 – 1) = 4.
La dernière ligne et la dernière colonne ont été rajoutées pour calculer les données théoriques de l'hypothèse d'indépendance. En effet si la classe est indépendante de la population au lieu de n_{11} il devrait y avoir une proportion de N1 fonction de la fréquence de la population 1.
Soit e_{11} =N1 $\frac{E1}{N}$, e_{22} =N2 $\frac{E2}{N}$ etc. On peut calculer ainsi les 9 e_{ij}. (On obtient un 2eme tableau)
Ensuite pour chaque case du tableau on calcule $Xij = \frac{(nij-eij)^2}{eij}$ et notre KHI-2 q = $\sum Xij$.
Idéalement, si la nature de la population n'influence pas la classe, (hypothèse d'indépendance) q devrait être nul.

Si q est petit, cela signifie que l'effectif d'une classe est dispatché entre les 3 populations pratiquement en fonction de leur fréquence ce qui est normal quand la nature de la population n'influence pas la relation à une classe (population et classe sont indépendantes).

Si q est grand cela signifie que la nature de la population influence sa relation à une ou plusieurs classes (autrement dit, il existe une forte affinité entre certaines populations et certaines classes) puisqu'il y a un écart important par rapport à l'indépendance.
Tout le problème est de savoir à partir de quel seuil de grandeur de q on peut considérer que la dépendance a de grandes chances d'être effective.
C'est à ce stade qu'on a recours aux tables qui sont elles-mêmes fonction du degré de liberté..

Si la table donne une probabilité pour q d'être dépassé supérieure à 95% on peut émettre l'hypothèse qu'il y a dépendance entre le type de population et la classe. Dans le cas contraire on a un doute.

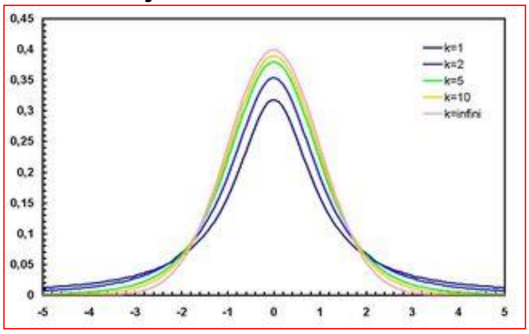
La loi de Student.

La loi de Student est une loi de probabilité, faisant intervenir le quotient entre une variable suivant une loi normale centrée réduite et la racine carrée d'une variable distribuée suivant la loi du **χ^2.**
Elle est surtout utile à la détermination rigoureuse de **l'intervalle de confiance** associé à **l'espérance** d'une variable **de loi normale de variance inconnue**

Soient **Z** une variable aléatoire de **loi normale centrée et réduite** et **U** une variable **indépendante de Z** et distribuée suivant la loi la loi du **χ^2** à **k** degrés de liberté. Par définition la variable

$T = \frac{Z}{\frac{U}{k}}$ suit une loi de Student à k degrés de liberté.

La densité de T notée fT utilise la fonction gamma d'Euler:
La densité fT associée à la variable T est symétrique, centrée sur 0, en forme de cloche.



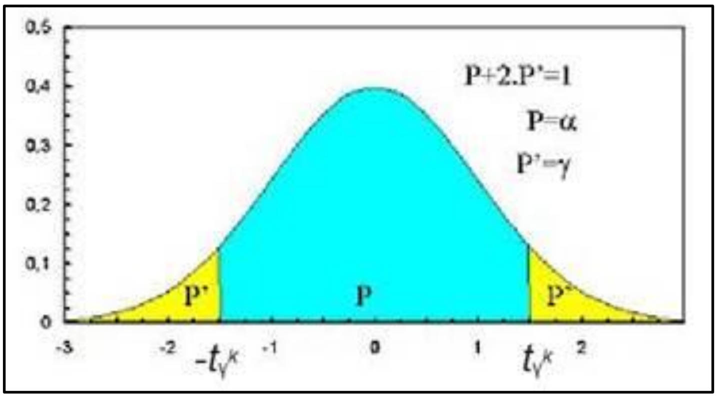
Son **espérance** ne peut pas être définie pour k = 1, et est nulle pour k > 1.

Sa **variance** est infinie pour k ≤ 2 et vaut $\frac{k}{k-2}$ pour k > 2.

Tables : il existe des tables donnant p(|X| > x) selon la valeur de k .

De la loi de student à la loi normale :
Lorsque **n** $\rightarrow \infty$ on admet que la loi de Student converge vers la loi **N(0,1)**

Application : détermination rigoureuse de **l'intervalle de confiance** associé à **l'espérance** d'une variable de loi normale **de variance inconnue**



Student à k degrés de liberté. t_y^k est la valeur de t pour laquelle P(t>t_y^k)= y

Si x1,…xn suivent une loi normale d'espérance **e** (à déterminer) et de variance σ^2 (inconnue) , au niveau de confiance **c** , **e** appartient à l'intervalle

$$I = \left[\bar{x} - t_{\frac{1-c}{2}}^{n-1}\sqrt{\frac{S}{n}} \; , \; \bar{x} + t_{\frac{1-c}{2}}^{n-1}\sqrt{\frac{S}{n}}\;\right]$$

avec $\bar{X}$ =moyenne des Xi et S estimateur de $\sigma^2 = \frac{\sum(Xi-\bar{X})^2}{n-1}$, r =1– c est le risque de l'estimation.
Loi de student à n – 1 degrés de liberté. $t_{\frac{1-c}{2}}^{n-1}$ est la valeur T de la table pour laquelle Pr(t >T) = $\frac{r}{2}$

On peut dire que $P(\ e \in I) \geq 1 - r$