

### Limites usuelles

$$\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

$$\frac{\ln(x)}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\frac{e^x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$x e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

$$\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

### De manière plus générale

Soient  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  des **réels strictement positifs**.

- En  $+\infty$  :

$$\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et

$$\frac{e^{\gamma x}}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

- En 0 et  $-\infty$  :

$$x^\alpha |\ln x|^\beta \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

et

$$|x|^\alpha e^{\gamma x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

### Équivalents classiques pour les fonctions en 0

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\operatorname{th} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\arcsin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\arctan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\operatorname{argsh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\operatorname{argth} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\operatorname{ch} x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

### De manière plus générale

Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$  alors :

$$\ln(1+f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$$

$$\sin(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$$

$$\tan(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$$

$$\cos(f(x)) - 1 \underset{x \rightarrow a}{\sim} -\frac{(f(x))^2}{2}$$

$$e^{f(x)} - 1 \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$$

$$(1+f(x))^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow a}{\sim} \alpha f(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

### Suite géométrique

$$a^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} \text{diverge si } a \in ]-\infty, -1[ \\ 0 \text{ si } a \in ]-1, 1[ \\ 1 \text{ si } a = 1 \\ +\infty \text{ si } a \in ]1, +\infty[ \end{cases}$$

### Comparaison des suites de référence

Soient  $a > 1, \alpha > 0$  et  $\beta > 0$  alors :

$$(\ln n)^\alpha = o_{n \rightarrow +\infty}(n^\beta)$$

$$n^\beta = o_{n \rightarrow +\infty}(a^n)$$

$$a^n = o_{n \rightarrow +\infty}(n!)$$

### Au voisinage de $+\infty$

$\operatorname{ch} x \sim \frac{e^x}{2}$	$\operatorname{Arg} \operatorname{sh} x \sim \ln x$
$\operatorname{sh} x \sim \frac{e^x}{2}$	$\operatorname{Arg} \operatorname{ch} x \sim \ln x$

Dans  $\operatorname{sh}(x)$  ou  $\operatorname{ch}(x)$  on a  $e^{-x}$  qui tend vers 0 d'où l'équivalent.

$$\operatorname{Arg} \operatorname{sh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \sim \ln(2x) \sim \ln(2) + \ln(x) \sim \ln(x)$$

$$\operatorname{Arg} \operatorname{ch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \sim \ln(x)$$

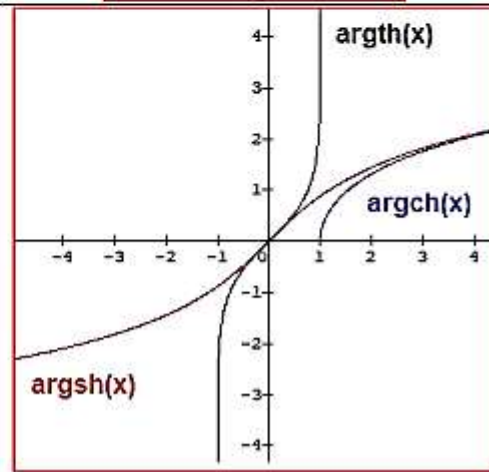
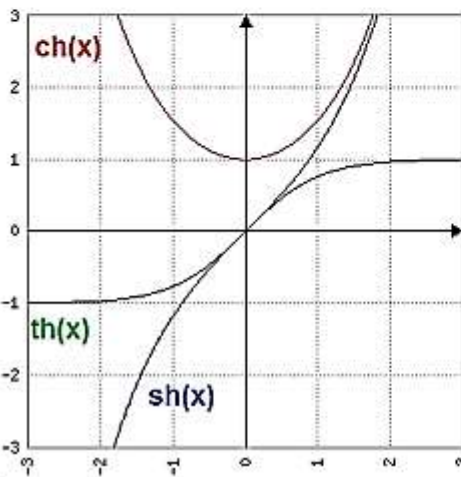
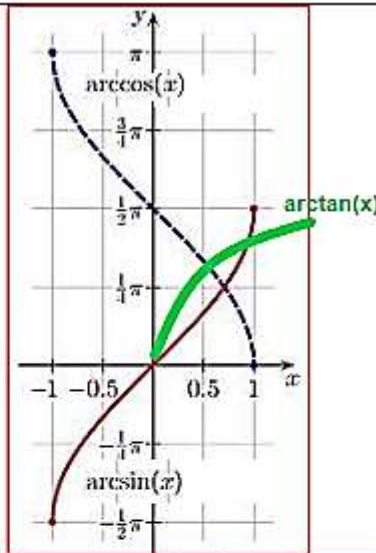
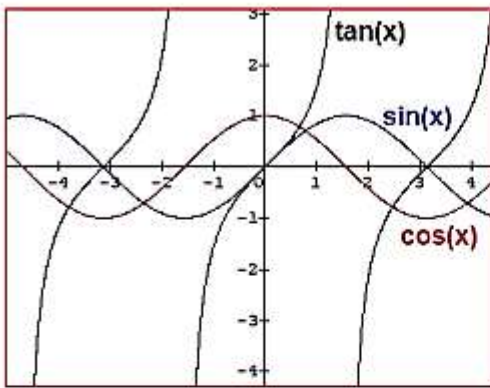
Ne retenir que les 2 premiers termes de chaque développement (ainsi que le procédé qui permet de l'obtenir)

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

Fonction	Developpement limité	Équivalents en 0
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$	$1+x$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$	$x$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$	$1$
$e^x$	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$	$1$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$	$x$
$(1+x)^m$	$1 + m \cdot x + \frac{m(m-1) \cdot x^2}{2!} + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-p+1) \cdot x^p}{p!} + o(x^p)$	$1+m \cdot x$
$\operatorname{sh} x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$	$x$
$\operatorname{ch} x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$	$1$
$\tan x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6)$	$x$
$\operatorname{th} x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6)$	$x$
$\operatorname{Arcsin} x$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{8 \cdot 5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$	$x$
$\operatorname{Arc} \tan x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$	$x$
$\operatorname{Arg} \operatorname{sh} x$	$x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{8 \cdot 5} - \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$	$x$
$\operatorname{Arg} \operatorname{th} x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$	$x$

### Dérivées des fonctions usuelles

$X^n \ (n \in \mathbb{N})$	$nX^{n-1}$	$\operatorname{Log}_a x$	$1 / (x \ln a)$	$\operatorname{Cotan} x$	$-1 - \operatorname{cotan}^2 x$
$X^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha X^{\alpha-1}$	$\operatorname{Cos} x$	$-\sin x$	$\operatorname{Cotan} x$	$-1 / \sin^2 x$
$e^{ax}$	$\lambda e^{ax}$	$\operatorname{Sin} x$	$\operatorname{Cos} x$	$\operatorname{Arc} \operatorname{cos} x$	$-1 / \sqrt{1-x^2}$
$a^x \ (a \in \mathbb{R}^{++})$	$a^x \ln a$	$\operatorname{Tan} x$	$1 + \tan^2 x$	$\operatorname{Arc} \operatorname{sin} x$	$1 / \sqrt{1-x^2}$
$\ln  x $	$1/x$	$\operatorname{Tan} x$	$1 / \cos^2 x$	$\operatorname{Arc} \operatorname{tan} x$	$1 / (1+x^2)$



Si on pose  $t = \tan(x/2)$  on peut écrire

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \quad \text{et de } x=2\text{Arc tan } t + 2k\pi \text{ on déduit } dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

## Tableau de primitives (à une constante près)

$(x-a)^\alpha$ $\alpha \neq -1$	$\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\frac{1}{1-x^2}$	Arg th x	$\frac{1}{2} \ln \left  \frac{1+x}{1-x} \right $
$\frac{1}{x-a}$ $a \in \mathbb{R}$	$\ln  x-a $	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{1}{1+x^2}$	Arc tan x	
$\frac{1}{x-c}$ $c \in \mathbb{R}$	$\ln  x-c $	$\frac{1}{\sin x}$	$\ln \left  \tan \frac{x}{2} \right $	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Arc sin x	
$\ln x$	$X(\ln x - 1)$	$\frac{1}{\cos x}$	$\ln \left  \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right $	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	Arg sh x	$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
$e^{cx}$	$\frac{e^{cx}}{c}$	Coth x	$\ln  \text{sh } x $	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	Arg ch x	$\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
$\tan x$	$-\ln  \cos x $	th x	$\ln \text{ch } x$	$\frac{1}{x^2 - 1}$	-Arg th x	$-\frac{1}{2} \ln \left  \frac{1+x}{1-x} \right $