

Table des matières

Procédé de définition d'une suite	1
Propriétés, vocabulaire et définitions.....	1
Suites arithmétiques :.....	2
Suites géométriques	2
Suites arithmético – géométriques	2
Récurrance linéaire à 2 termes	2
Autres récurrences linéaires à 2 termes	3
SYNTHESE	3
Suites définies par itération	4
Limites calculables par intégration.	7

Procédé de définition d'une suite

- $X_n = f(n)$. Si on connaît f la suite (X_n) est dite « explicitement définie » ou « **explicite** »
- $X_{n+1} = f(X_n)$ et on donne X_0 . La suite (X_n) est définie par **itération** ou par **récurrence**.
- $X_{n+2} = f(X_n) + g(X_{n+1})$ et on donne X_0 et X_1 . La suite (X_n) est définie par une **récurrence à 2 termes**.

Les suites explicites sont les plus faciles à étudier, il suffit souvent de les considérer comme une restriction de $f(x)$ à \mathbb{N} et l'étude de $f(x)$ comme fonction sur \mathbb{R} (sens de variation, limites en l'infini) nous donne des renseignements qui pourront être exploités dans l'étude de la suite.

Certaines suites récurrentes comme

la **suite géométrique** ($X_{n+1} = K X_n$)

ou la **suite arithmétique** ($X_{n+1} = X_n + K$)

peuvent être simplement ramenées à des suites explicites, mais ce n'est généralement pas le cas et il faudra alors recourir à des méthodes d'étude spécifiques.

Propriétés, vocabulaire et définitions

Sens de variation

Si sur un intervalle de \mathbb{N} on a $X_n < X_{n+1}$ on dit que la suite est **croissante**. Si on a $X_{n+1} < X_n$ on dit que la suite est **décroissante**. On peut être amené à étudier le signe de $X_{n+1} - X_n$ ou à comparer le module de $|X_{n+1} / X_n|$ à 1.

Une suite qui ne change pas de sens de variation sur un intervalle de \mathbb{N} est dite **monotone** sur cet intervalle.

Suites extraites

On peut être amené à considérer des suites **extraites** de (X_n) par restriction de l'indice à une partie infinie de \mathbb{N} par exemple n impair ($n = 2p + 1$) ou n pair ($n = 2p$).

Suites convergentes, divergentes

On dit qu'une suite est **convergente** si quand $n \rightarrow \infty$, $\lim (X_n)$ existe et prend une valeur finie.

Si ce n'est pas le cas, on dit qu'elle est **divergente**

- Si (X_n) a pour limite L , c'est aussi le cas de toute suite extraite de (X_n)
- Dans \mathbb{R} , toute suite croissante et majorée (ou décroissante et minorée) est convergente
- Si $X_n = f(n)$, $\lim (X_n)$ si elle existe est égale à $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
- Si $f(x)$ est continue en a , quand a_n est une suite qui converge vers a alors $f(a_n)$ est une suite qui converge vers $f(a)$. La réciproque est vraie.
- Une **suite de Cauchy** est une suite telle que quel que soit ε , il existe un rang q tel que pour tous les rangs n et p supérieurs à q on ait $d(X_n, X_p) < \varepsilon$.

Une suite convergente est une suite de Cauchy. La réciproque est vraie dans \mathbb{R} et \mathbb{C} .

● Si deux suites (Y_n) et (Z_n) ont des sens de variation inverses et que la suite $(Y_n - Z_n)$ converge vers 0, alors, on dit qu'elles sont **adjacentes**. Deux suites adjacentes convergent vers une même limite L .

● Si (X_n) et (Y_n) sont 2 suites convergentes : Les suites suivantes sont convergentes : $(X_n + Y_n)$, (λX_n) , $(X_n Y_n)$, (X_n / Y_n) si $\lim (Y_n) \neq 0$, $f(X_n)$ si f est continue en $\lim X_n$. Respectivement vers $L+L$, λL , LL , L/l , $f(L)$

Une propriété intéressante :

Si (U_n) positive et il existe $M \in]0,1[$ tel que pour tout $n > N$ on ait $\frac{U_{n+1}}{U_n} < M$ alors $U_n \rightarrow 0$.

Démonstration à partir de $U_{n+1} < M U_n$ on trouve

$$\frac{U_{n+1}}{M^{n+1}} < \frac{U_n}{M^n} \text{ donc } \frac{U_n}{M^n} \text{ est décroissante et bornée et } U_n = \frac{U_n}{M^n} M^n$$

U_n Produit d'une suite positive décroissante et bornée $\frac{U_n}{M^n}$ par une suite qui tend vers 0 (M^n) donc $U_n \rightarrow 0$

Des résultats intéressants :

En l'infini (C constante positive)

$\lim \frac{C^n}{n!} = 0$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$	$e^x = \lim (1 + \frac{x}{n})^n$
$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{C}{n+1}$	hors programme	On part de $a^n = e^{n \ln(a)}$

Comparaisons de suites (à l'infini, à partir d'un rang donné)

- (X_n) **domine** (Y_n) si Il existe λ non nul tel que $|Y_n| \leq \lambda |X_n|$
- (X_n) **négligeable** devant (Y_n) si $\lim (X_n / Y_n) = 0$ ($X_n \ll Y_n$ ou $X_n = o(Y_n)$)
- (X_n) **équivalente** à (Y_n) si $\lim (X_n - Y_n) = 0$ si ($X_n \approx Y_n$)

Suites arithmétiques :

Récurrence : $X_{n+1} = X_n + A$ et X_0 est connu

D'où on tire $X_n = X_0 + nA$ (suite explicite forcément divergente)

Somme de rang n : $S_n = X_0 + \dots + X_n = (n+1) \frac{(2X_0 + nA)}{2}$

Où $(n+1)$ est le nombre de termes et $(2X_0 + nA)$ la somme du 1^{er} et du dernier terme.

● remarque : somme des n premiers entiers : $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Récurrence $X_{n+1} = RX_n$ (R est appelé raison) et X_0 est connu

D'où on tire $X_n = X_0 R^n$ (suite explicite qui converge vers 0 si $|R| < 1$)

Somme de rang n $S_n = X_0 + \dots + X_n = X_0 \frac{R^{n+1} - 1}{R - 1}$ ($n+1$ est le nombre de termes)

● Si $|R| < 1$, S_n converge vers $X_0 \frac{1}{1-R}$

● remarque : $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ permet de factoriser $x^{n+1} - 1$

à rapprocher du DL de $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^{n+1})$ (au voisinage de 0 : x^{n+1} tend vers 0)

Suites arithmético – géométriques

Récurrence : $X_{n+1} = RX_n + A$ et X_0 est connu

C'est une suite géométrique si $A = 0$ et une suite arithmétique si $R = 1$

● Comment choisir K tel que $X_n + K$ soit une suite géométrique de raison R ? On trouve $K = \frac{A}{R-1}$

● Le 1^{er} terme de cette suite géométrique est $X_0 + K$ et on en tire $X_n + K = (X_0 + K)R^n$ d'où

$X_n = (X_0 + K)R^n - K$ (Suite explicite) avec $K = \frac{A}{R-1}$

Récurrence linéaire à 2 termes

Récurrence linéaire à 2 termes : $X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n$ avec X_0 et X_1 donnés .

Si 2 suites vérifient cette relation avec les mêmes deux premiers termes, elles sont égales.

Il suffit d'en trouver une pour trouver la forme explicite.

Si on prend la suite $X_n = kr^n + KR^n$

On a $X_{n+1} = kr^{n+1} + KR^{n+1}$ et $X_{n+2} = kr^{n+2} + KR^{n+2}$. Notre relation devient :

$kr^{n+2} + KR^{n+2} = A(kr^{n+1} + KR^{n+1}) + B(kr^n + KR^n) = kr^n(Ar+B) + KR^n(AR+B)$

On identifie donc $r^2 = Ar + B$ et $R^2 = AR + B$.

Donc r et R doivent être racines de l'équation

$X^2 - AX - B = 0$ (on traite le cas de 2 racines réelle, les autres cas seront évoqués plus loin)

Quant à k et K on les identifie grâce aux « conditions initiales » :

$X_0 = k + K$ et $X_1 = kr + KR$, système d'équations à 2 inconnues k et K (r et R étant connus)

● Finalement on a une forme explicite $X_n = kr^n + KR^n$

(ou $kr^n \cos n\theta + Kr^n \sin n\theta$ si racines complexes ou $kr^n + Knr^n$ si racine double)

Avec r et R racines de $X^2 - AX - B = 0$ et k et K solutions de $X_0 = k + K$ et $X_1 = kr + KR$

Exemple : suite de Fibonacci : $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$, $X_0 = 0$ et $X_1 = 1$

Equation $X^2 - X - 1 = 0$ solutions $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $R = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Equations $0 = k + K$ et $1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}k + \frac{1-\sqrt{5}}{2}K$ solutions $k = \frac{\sqrt{5}}{5}$ et $K = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

En conclusion : $X_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$

Autres récurrences linéaires à 2 termes

Récurrence linéaire à 2 termes de type : $X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n + C$ avec X_0 et X_1 donnés .

Appelons SL (A, B, C) l'ensemble des suites qui vérifient l'équation sans vérifier les conditions initiales

● Appelons SL(A, B) l'ensemble des suites vérifiant $X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n$ sans conditions initiales, on a vu qu'il suffisait de résoudre l'équation $X^2 - AX - B = 0$ pour déterminer une base de SL(A, B) $\{f(n) \text{ et } F(n)\}$ telle que toute suite de SL(A, B) soit exprimée sous la forme $X_n = kf(n) + KF(n)$

● On démontre facilement que si (S_n) est une suite de SL(A,B,C), on les obtient toutes en ajoutant à (S_n) une suite de SL(A, B).

Donc si $(X_n) \in SL(A,B,C) : X_n = S_n + Y_n$ avec $Y_n \in SL(A,B)$

● Prenons la suite constante $S_n = \lambda$. Elle appartient à SL(A,B,C) si $\lambda = A\lambda + B\lambda + C$ soit $\lambda(1 - A - B) = C$.

● Si $A+B \neq 1$, $S_n = \lambda$ est la suite cherchée avec $\lambda = C / (1 - A - B)$

Nos solutions sont donc du type $X_n = Y_n + \lambda$ et on sait trouver Y_n par le procédé étudié dans l'exemple précédent.

$Y_n = kf(n) + KF(n)$, $X_n = kf(n) + KF(n) + \frac{C}{1-A-B}$ et les conditions initiales nous permettent de trouver k et K .

● Si $A+B = 1$ On cherche une suite de type $S_n = \lambda n$ qui appartienne à SL(A,B,C) et on trouve $\lambda(2-A)=C$. Soit $\lambda = C / (2-A)$ pourvu que A soit différent de 2 quand $B = -1$

● Si $A+B = 1$ et A est différent de 2

On a $A = B - 1$, le polynôme caractéristique devient $X^2 - (B-1)X - B = 0 = (X-1)(X+B)$ et $B \neq -1$

$f(n) = 1^n$ et $F(n) = (-B)^n$ Donc les solutions sont de la forme $\lambda n + k + K(-B)^n$

Ce qui donne $X_n = \frac{Cn}{2-A} + k + K(A-1)^n$

● Si $A+B = 1$ et $A = 2$ c'est que $B = -1$ et on est obligé de chercher une suite S_n de la forme $S_n = \lambda n^2$.

Elle doit vérifier $\lambda(n+2)^2 = 2\lambda(n+1)^2 - \lambda n^2 + C$ soit $2\lambda = C$

L'équation caractéristique donne $X^2 - 2X + 1 = 0$ (une racine double $X = 1$)

Donc $f(n) = 1^n$ et $F(n) = n1^n$. Ce qui donne $Y_n = k + Kn$

Et $X_n = Y_n + \lambda n^2$ $X_n = k + Kn + \frac{C}{2}n^2$

SYNTHESE

● Si une récurrence est de la forme générale $X_{n+2} - AX_{n+1} - BX_n = C$

On retrouve la suite géométrique avec $B = 0$ et $C = 0$

La suite arithmético géométrique avec $B = 0$

La récurrence linéaire dans le cas général avec selon le cas C nul ou non nul

● Son polynôme caractéristique est $X^2 - AX - B = 0$

On s'intéresse à ses racines non nulles et on trouve selon le cas

Nombre de solutions non nulles	Base des solutions		Type des solutions
	f(n)	F(n)	Avec $\lambda = 0$ si $C = 0$ et $\lambda \neq 0$ si $C \neq 0$
1 racine simple R	R^n		$X_n = Kf(n) + \lambda$
2 racines r et R	r^n	R^n	Si $A+B \neq 1$ $X_n = kf(n) + KF(n) + \lambda$
2 racines $Re^{i\theta}$ et $Re^{-i\theta}$	$R^n \cos n\theta$	$R^n \sin n\theta$	Si $A+B = 1$ et $A \neq 2$ $X_n = kf(n) + KF(n) + \lambda n$
1 racine double R	R^n	nR^n	Si $A+B = 1$ et $A = 2$ $X_n = kf(n) + KF(n) + \lambda n^2$
$X_n = \lambda$ (ou λn ou λn^2) étant (par ordre de préférence) une suite qui vérifie la formule de récurrence K et k étant déterminés par les conditions initiales (X_0 et X_1)			

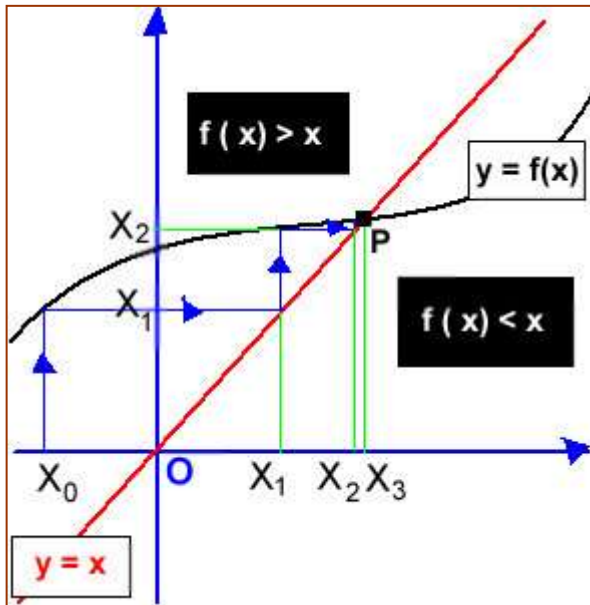
Il suffit de commencer par déterminer la suite stationnaire $S_n = \lambda$ qui vérifie la formule, si elle n'existe pas on essaie la suite λn (puis λn^2) ce qui fixe éventuellement des contraintes aux coefficients du polynôme caractéristique. Puis ayant déterminé S_n , $f(n)$ et $F(n)$ on peut écrire $X_n = kf(n) + KF(n) + S_n$.

Suites définies par itération

$X_{n+1} = f(X_n)$ avec f trop complexe pour trouver une formule explicite.

On dit que la suite est **définie par itération de f**

Interprétation graphique :



On trace le graphe de $f(x)$ et la droite d'équation $y = x$.

On prend X_0 sur l'axe des X et on a $X_1 = f(X_0)$

Ensuite, on va chercher le point (X_1, X_1) sur la droite et à sa

verticale sur la courbe on a le point (X_1, X_2)

On réitère le procédé pour trouver le point (X_2, X_2) sur la

droite et à sa verticale on a le point (X_2, X_3)

Ainsi, de proche en proche, on trouve sur la courbe les points

d'ordonnée X_1, X_2, \dots, X_n et selon les configurations relatives

de la courbe ou de la droite, ces points peuvent diverger ou

converger vers un point précis de la courbe.

Notre but est d'étudier la divergence ou la convergence de la suite selon les paramètres de la configuration.

Critères de convergence :

● Il est clair que s'il existe un intervalle I de \mathbb{R} tel que $f(I) \subset I$, et qu'il existe une valeur de n telle que $X_n \in I$ alors $f(X_n) \in I$ alors la série, pour tout rang supérieur à n , est « prisonnière » dans cet intervalle qu'on appelle « **Intervalle de stabilité** »

● Par ailleurs si la fonction est **continue** et que X_n converge en L , on a $\lim X_{n+1} = \lim f(X_n) = f(\lim X_n)$ et donc $L = f(L)$, ce qui signifie que si (X_n) converge, c'est forcément à un point où $f(x) = x$, c'est-à-dire en un point d'intersection de la courbe et de la droite $y = x$.

Si un tel point existe, on dit que c'est un **point fixe de f** mais son existence ne garantit pas la convergence de (X_n) . C'est une condition nécessaire mais pas suffisante.

● on va voir que la convergence dépend en fait de la valeur de la dérivée de $f(x)$ au point où elle coupe la droite $y = x$:

Sur les dessins suivants, on a représenté la droite $y = x$ en rouge et le graphe de $f(x)$ dans un voisinage du point fixe, qui peut donc être assimilé à la tangente en ce point (en noir).

Supposons la **fonction croissante au point fixe** :

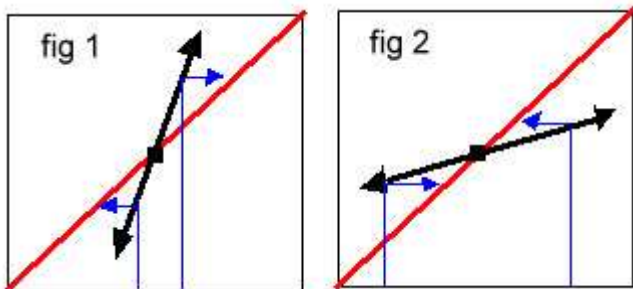


Figure 1 : quand la dérivée est > 1 , si X_n « tape » dans le voisinage du point fixe, la prochaine valeur X_{n+1} qu'on va chercher sur la droite

$y = x$ sera plus éloignée du point fixe que X_n .

Figure 2 : au contraire quand la dérivée est < 1 X_{n+1} se rapproche du point fixe par rapport à X_n

Supposons la **fonction décroissante au point fixe**:

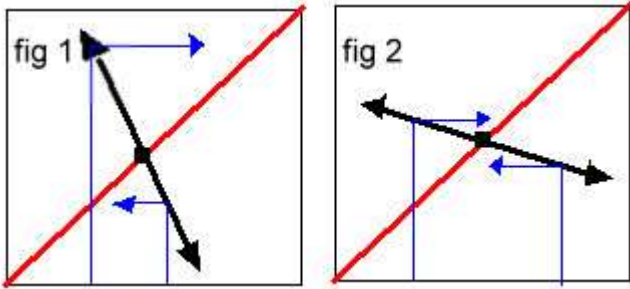


Figure 1 : quand la dérivée est < -1 , si X_n « tape » dans le voisinage du point fixe, la prochaine valeur X_{n+1} qu'on va chercher sur la droite $y = x$ sera plus éloignée du point fixe que X_n .

Figure 2 : au contraire quand la dérivée est > -1 alors X_{n+1} se rapproche du point fixe par rapport à X_n

Donc, les conditions idéales de convergence sont réunies quand au point fixe L **$-1 < f'(L) < 1$**

De plus, il est facile de comprendre que c'est seulement quand cette condition est vérifiée pour f' qu'on a, pour un voisinage V de L

$f(V) \subset V$ (stabilité).

Il nous reste à résoudre plusieurs problèmes : Quelles sont les limites d'un intervalle de stabilité ? La situation d'un X_n dans un intervalle de stabilité autour du point fixe entraîne-t-elle la convergence ? Dans quels cas, la situation d'un X_n dans un tel intervalle est-elle inéluctable ?

Suites récurrentes et fonctions croissantes ou décroissantes

● supposons f continue

Si pour tout $x \in [a ; b]$ $f(x) > x$ alors $f(b) > b$ et $f(b) \notin [a ; b]$ (passage au limites si intervalle ouvert)

Si pour tout $x \in [a ; b]$ $f(x) < x$ alors $f(a) < a$ et $f(a) \notin [a ; b]$ (passage au limites si intervalle ouvert)

Donc, **si f , continue, comporte un intervalle de stabilité, le graphe de f coupe la droite $y = x$ sur cet intervalle et il existe un point fixe L dans cet intervalle (tel que $f(L) = L$)**

● Une fonction croissante vérifiant $f(0) \geq 0$ et coupant la droite $f(x) = x$ en $x = L$ ($L > 0$) possède un intervalle de stabilité $[0, L]$ puisque

$f([0, L]) \subset [0, L]$.

C'est le cas de \sqrt{x} et x^2 stables sur $[0, 1]$

x^2 n'est pas stable sur $[a, 1]$ avec $0 < a < 1$ puisque $a^2 < a$

\sqrt{x} n'est pas stable sur $[0, b]$ avec $0 < b < 1$ puisque $\sqrt{b} > b$

Dans les 2 cas, le retrait d'un point fixe de l'intervalle $[0, 1]$ dégrade son caractère « stable ».

● Soit un intervalle de stabilité $[a ; b]$ pour f une fonction **croissante** sur $[a ; b]$

Si il existe $c \in [a ; b]$ tel que $f(c) > c$ alors l'intervalle de stabilité contient un point fixe $L > c$

En effet, si pour tout $x \in [c ; b]$ on a $f(x) > x$ il vient que $f(b) > b$ et b ne fait pas partie de l'intervalle de stabilité. On a donc forcément $k > c$ tel que $f(k) \leq k$ et la courbe coupe la droite $y = x$ sur l'intervalle $[c ; k]$. De même on démontre que :

Si il existe $c \in [a ; b]$ tel que $f(c) < c$ alors l'intervalle de stabilité contient un point fixe $L < c$

● Soit f une application croissante sur un intervalle de stabilité $[a ; b]$, une suite (X_n) définie par $X_{n+1} = f(X_n)$ et comportant un terme dans cet intervalle, alors, (X_n) est monotone.

Si $f(X_0) - X_0 > 0$, (**1^{er} point au dessus de la droite $y = x$**) la suite est **croissante**.

Comme $f(x) > x \Rightarrow x < L$ et que pour $x > L$ on a $f(x) < x$, la suite X_n est majorée par L et comme une suite croissante et majorée converge, on a vu que c'était forcément vers L

Si $f(X_0) - X_0 < 0$, (**1^{er} point sous la droite $y = x$**) la suite est **décroissante**.

$f(x) < x \Rightarrow x > L$ et cette fois la suite est minorée par L donc elle converge vers L

Donc si f est croissante dans un intervalle de stabilité la suite récurrente converge vers L

Exemples : $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ stable sur $[0, b]$ avec $b \geq 1$ croissante ou décroissante vers 1 selon qu'on prend $x_0 < 1$ ou $x_0 > 1$

$x_{n+1} = (x_n)^2$ stable sur $[0 ; 1]$ n'est convergente et décroissante vers 0 que si l'on prend $0 \leq x \leq 1$

● Si f est **décroissante** sur un intervalle de stabilité, les choses sont moins claires.

Mais il existe 2 suites extraites de X_n : X_{2k} et X_{2k+1} (associées à $f \circ f$ croissante) telles que chacune d'elles soit convergente. X_n ne converge que si elles ont la même limite (suites adhérentes).

Suites récurrentes et fonctions contractantes

● Soit f une fonction telle que $|f(a) - f(b)| < k|a - b|$ avec $K < 1$, sur un intervalle contenant a et b . On dit qu'elle est **contractante**.

Remarquons que de f contractante on déduit $-1 < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 1$ et donc $-1 < f'(x) < 1$

Remarquons que si f est telle que $-1 < f'(x) < 1$, le théorème des accroissements finis donne

$-1 < f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 1$ et donc $|f(a) - f(b)| < k|a - b|$ avec $K = \sup f'(x)$ sur l'intervalle. Donc :

f contractante $\Leftrightarrow |f'(x)| < 1$

● Soit L un **point fixe** de **f contractante** et X_n définie par $X_{n+1} = f(X_n)$.

Alors on a $|f(L) - f(X_n)| < k|L - X_n|$ d'où on déduit $|L - X_{n+1}| < k|L - X_n|$

Donc la suite $|L - X_n|$ est décroissante et minorée par 0, ce qui signifie qu'elle est convergente, de même que la suite X_n , et comme si X_n a une limite, il s'agit forcément de L . On en déduit que :

f contractante avec un point fixe en $L \Rightarrow X_n$ converge vers L

f est-elle contractante ? f admet-elle un point fixe ? C'est le 1^{er} test à réaliser quand on spéculé sur la convergence d'une série définie par itération grâce à une fonction décroissante.

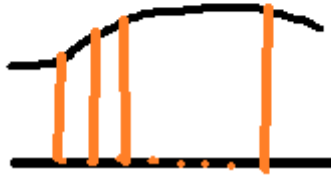
Limites calculables par intégration.



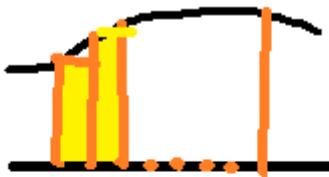
Soient 2 points d'abscisse respective a et b sur l'axe des x.
Posons $b - a = D$



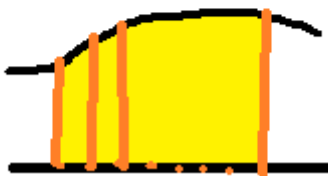
Quand on partage le segment en n segments égaux on obtient les points d'abscisses $a, a + \frac{D}{n}, a + \frac{2D}{n}, \dots, a + \frac{nD}{n}$



Si on écrit $\sum_{k=0}^n f(a + \frac{kD}{n})$ on obtient la somme algébrique des mesures des segments désignés en rouge sur le dessin mais ça ne veut pas dire grand-chose.



Par contre si on a un facteur $\frac{1}{n}$ devant la somme $Un = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(a + \frac{kD}{n})$
On peut dire que $Un = \frac{1}{D} (\frac{D}{n} \sum_{k=0}^n f(a + \frac{kD}{n}))$ et $\frac{D}{n}$ étant la base des n rectangles colorés en jaune qui majorent ou minorent l'aire de la courbe ...
Ça commence à ressembler à quelque chose.



Quand on fait tendre n vers ∞ , $\frac{D}{n}$ devient dx, la somme devient intégrale
Et $Un \rightarrow \frac{1}{D} \int_a^b f(x) dx$

C'est un procédé de calcul de limite qu'on peut appliquer à certains cas de suites

Par exemple quand $n \rightarrow \infty \dots$

$$(d) \ln\left(1 + \frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2 + \cos(3k\pi/n)},$$

si $n \rightarrow \infty$
le $\ln \rightarrow \frac{\pi}{n}$ et l'argument du cos est $[0, 3\pi]$ divisé par n.

$$(e) \frac{\pi}{n} (\sin(\pi/n) + \sin(2\pi/n) + \dots + \sin((n-1)\pi/n)),$$

$$(h) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2 + \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)},$$

Qd $n \rightarrow \infty$ le sinus tend vers $\frac{\pi}{n}$

Et il y en a d'autres permettant de se ramener à ce cas par une transformation.

$$\sqrt[n]{(1 + (1/n)^2)(1 + (2/n)^2) \dots (1 + (n/n)^2)},$$

Par exemple ici en prenant $\ln(Un)$ on doit obtenir un truc qui ressemble à

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \text{ c'est l'intervalle } [0, 1] \text{ qui a été découpé en n segments égaux de largeur } \frac{1}{n}$$

$$\ln(Un) \rightarrow \int_0^1 \ln(1 + x^2) dx = [x \ln(1 + x^2) - 2x + 2 \arctan(x)]_0^1$$