APPLICATIONS LINEAIRES

Définition des AL, propriétés des AL, matrices associées et leurs propriétés, exemples et remarques.

E et F sont des espaces vectoriels.
Soit f une application de **E** dans **F** f : v ➔V = f(v)
f est dite « linéaire » si

- pour tout couple de vecteurs v_1 et v_2 de E on a **$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$**
- pour tout vecteur v de E et tout réel k on a **$f(kv) = kf(v)$**

Ce qu'on peut résumer ainsi : pour toute combinaison linéaire de vecteurs de E **$(k_1v_1 + \ldots + k_nv_n)$** on a **$f(k_1v_1 + \ldots + k_nv_n) = k_1f(v_1) + \ldots + k_nf(v_n)$.**

En particulier si on écrit un vecteur dans sa base **$v = x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots + x_nb_n$**

- On a **$f(v) = x_1 f(b_1) + x_2 f(b_2) + \ldots + x_n f(b_n)$**

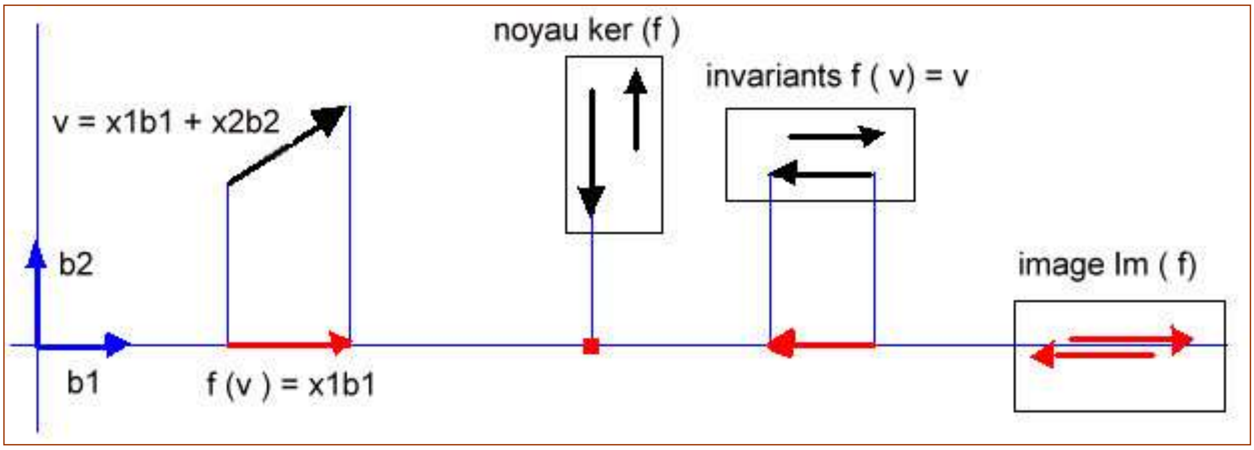
ce qui prouve qu'il suffit de connaître $f(b_1)$, $f(b_2)$, …., $f(b_n)$ pour calculer f(v) et connaître f .

Exemples d'applications linéaires: dans R, f : x ➔ 3x est linéaire tandis que f : x➔3x + 2 ne l'est pas

Propriétés des applications linéaires

- $f(0_E) = 0_F$ (il suffit de faire $f(0_E) = f(v - v) = f(v) - f(v) = 0_F$)
- **Im (f)** l'ensemble de toutes les images des éléments de E par f est un **sous espace vectoriel de F**
- **Ker (f)** ensemble des vecteurs de E qui on pour image 0_F, **est un sous espace vectoriel de E**
- L'ensemble des vecteurs v de E tels que f(v) = kv (avec k donné) est un sous espace vectoriel de E
- En particulier c'est le cas des **invariants** de E qui sont tels que f(v) = v

Exemple de la projection du plan de base (b_1 , b_2) sur la droite de base (b_1) parallèlement à (b_2)



Applications linéaires et matrices

Soit **E** (base b de dimension n) et **F** (base B de dimension p) 2 espaces vectoriels et f une application linéaire de **E** dans **F** . Notre problème est de trouver les coordonnées de f(v) dans B quand on connaît les coordonnées de v dans b.
On a vu qu'il suffit de connaître l'image des vecteurs de la base b $f(b_1)$, $f(b_2)$,., $f(b_n)$ pour connaître f

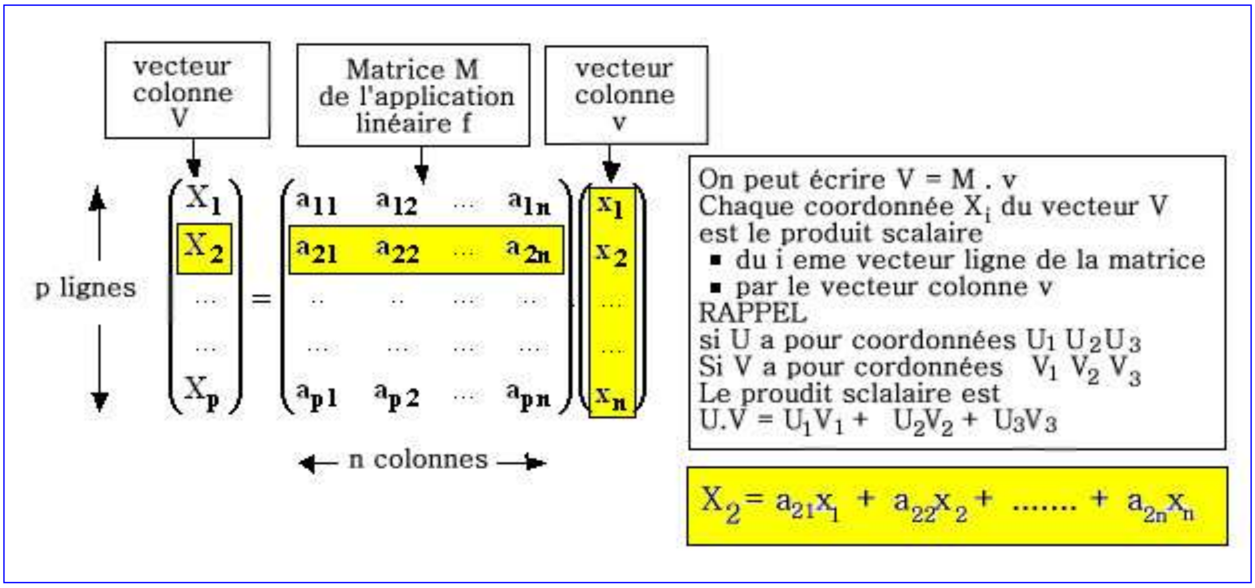
Supposons que $\left.\begin{array}{l} \mathbf{f(b_1) = a_{11}B_1 + a_{21}B_2 + \ldots + a_{p1}B_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{f(b_n) = a_{1n}B_1 + a_{2n}B_2 + \ldots + a_{pn}B_p} \end{array}\right\}$ **système définissant l'application f**

Si $\mathbf{v = x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots + x_nb_n}$
on a $\mathbf{f(v) = x_1\, f(b_1) + x_2\, f(b_2) + \ldots + x_n\, f(b_n)}$ (déf. d'une appli linéaire)
Si on remplace dans f(v) les $f(b_i)$ par leur valeur dans le système 1 on va trouver
En facteur de B_1 dans f(v) : $\mathbf{B_1\,(x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots + x_na_{1n})}$
Et en facteur de Bp dans f(v) : $\mathbf{B_p\,(x_1a_{p1} + x_2a_{p2} + \ldots + x_na_{pn})}$
Donc, les coordonnées de V=f(v) dans la base B en fonction des cordonnées de v dans la base b **:**

$\left.\begin{array}{l} \mathbf{X_1 = x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots + x_na_{1n}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{X_p = x_1a_{p1} + x_2a_{p2} + \ldots + x_na_{pn}} \end{array}\right\}$ **Coordonnées de l'image par f de v dans la base B**

On symbolise ces calculs de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & \ldots & .. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$



E , base **b** est un espace vectoriel de dimension **n**
F , base **B** est un espace vectoriel de dimension **p**
f est une application linéaire de **E** vers **F**
À un vecteur **v** de **E** elle fait correspondre un vecteur **V** de **F**
La dimension du vecteur colonne antécédent **v** exprimé dans la base **b** est celle de **E** c'est-à-dire **n**
La dimension du vecteur colonne image **V** exprimé dans la base **B** est celle de **F** c'est-à-dire **p**
Les dimensions de la matrice de **f** sont **n colonnes X p lignes**

Propriétés des matrices liées à une application linéaire

● si on rapproche la matrice M d'une application f de E dans F…

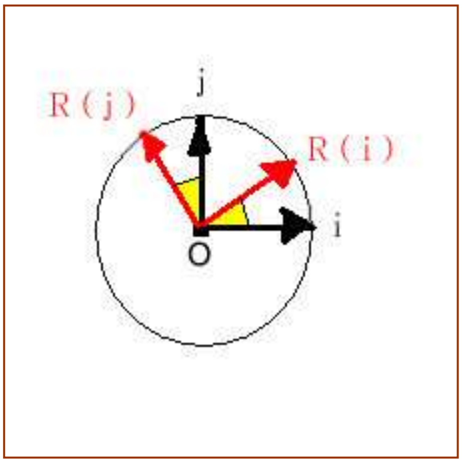
$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

… du système définissant f et donnant l'image des vecteurs de la base b de **E** par f

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{f(b_1) = a_{11}B_1 + a_{21}B_2 + \ldots + a_{p1}B_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{f(b_n) = a_{1n}B_1 + a_{2n}B_2 + \ldots + a_{pn}B_p} \end{array}\right\}$$ **système définissant l'application f**

On observe que les coefficients de la **i ème colonne** de la matrice sont les cordonnées de **f (b_i)** dans la base B de F .
Cette propriété est **très utile** pour construire la matrice d'une application linéaire.

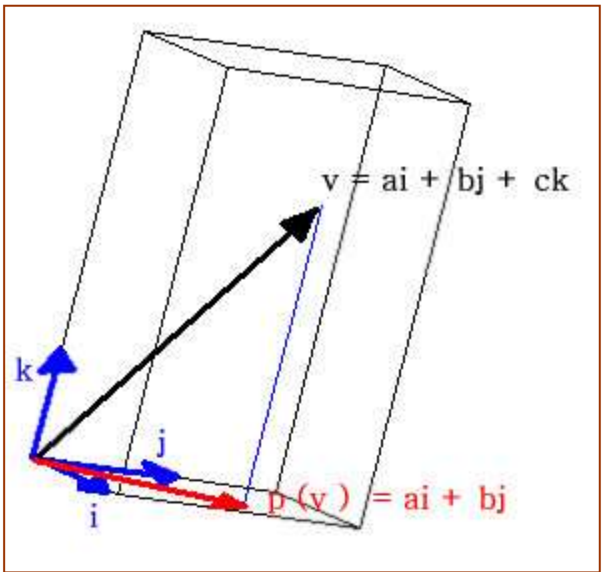
Exemple : matrice d'une rotation d'angle θ dans le plan (i , j)



Ici, on est dans un repère orthonormé (O , i , j) . O est le centre de la rotation, θ son angle. Il s'agit d'une transformation ponctuelle.
La rotation d'un vecteur est assimilée à celle d'un bipoint représentant ce vecteur, le bipoint image représentant le vecteur image.
C'est une application linéaire dans le plan vectoriel rapporté à la base {i , j}
Le centre de rotation perd toute signification dans la rotation vectorielle.
L'image de i est R(i), l'image de j est R(j) .
Les coordonnées de R(i) dans la base { i, j } sont (cos θ , sin θ)
Les coordonnées de R(j) dans la base { i, j } sont (–sin θ , cos θ)

Donc dans cette base, la matrice de la rotation est : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Exemple : Projection de l'espace {i , j , k} dans l'espace {i , j} parallèlement à k



La projection vectorielle p est une application linéaire
Le vecteur ai + bj + ck a pour image ai + bj .
L'image de i est i (1 , 0) dans la base { i , j }
L'image de j est j (0 , 1) dans la base { i , j }
L'image de k est 0 (0 , 0) dans la base { i , j }
La matrice de la projection de E rapporté à { i , j , k } dans P rapporté à {i , j} est : $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Im (p) = plan vectoriel { i , j }   Ker (p) = droite vectorielle { k }

Remarques :

● La composition de 2 applications linéaires f ○ g , la somme (f + g) de 2 applications de **E** dans **F**, le produit par un scalaire de f (λf) sont des applications linéaires.
● Dans tous les cas on a **dim (Ker (f)) + dim (Im (f)) = dim (E**)
● On appelle **rang de f** la dimension de **Im (f)** .
● Si une application linéaire f est **bijective**, on a **Ker (f) =** $\{0_E\}$ (Ker (f) de dimension 0) et **im (f) = F**
donc rang de f = Dim (E) ou Dim (F)
● Si une application linéaire est bijective on a forcément **dim (E) = dim (F)** et la matrice de cette application est une matrice carrée à n lignes et n colonnes.
Mais la réciproque n'est pas vraie .
● Quand une matrice n'est pas carrée, l'application linéaire qui lui est associée ne peut pas être bijective.
Mais si elle a plus de lignes que de colonnes, elle peut quelquefois être injective (et donc bijective si on la considère comme une application de E dans
Im (f) qui est un sous - espace vectoriel)
● Si une application linéaire est bijective, elle admet une application linéaire réciproque f^{-1} elle aussi associée à une matrice carrée.
On a $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_E$ (identité dans E)