Sacré problème

Le corps du délit :

OUEST	EST
♠ AR1098	♠ 7654
♥ 109	♥ ARD
♦ DV6	♦ AR9
♣ 1098	♣ 765

Est a ouvert de 1SA et il joue le contrat de 4 piques.
Les adversaires encaissent les 3 premières levées à trèfle, NORD montrant ♣ **A32** et SUD ♣ **RD4**.
Puis NORD ressort du ♦**2,** SUD fournissant le ♦**3**.
Sur l'as de pique, le 2 apparaît en SUD et **le valet en NORD** .

Le déclarant rejoint sa main grâce à l'as de cœur (NORD fournissant le 2 et SUD le 3)
Puis il présente le ♠**5** SUD fournissant le ♠**3 .**

Arrêt sur image.

La situation des flancs (cartes vues / cartes cachées) est la suivante

NORD	♣2	♣3	♣A	♦2	♠V	♥2	?						
SUD	♣R	♣D	♣4	♦3	♠2	♥3	♠3						

Le problème du déclarant est simple : faut - il passer le ♠**R** en espérant qu'initialement les piques adverses étaient équitablement répartis **(**♠**DV** en NORD et ♠**32** en SUD) ou faut - il passer le ♠**10** pour une impasse en espérant que le partage initial était ♠**V** sec en NORD et ♠**D32** en SUD ?
Les théoriciens du bridge ont depuis longtemps résolu cette question en préconisant de passer le 10 en raison du principe du moindre choix . Sur quoi repose ce principe ?

Le mode de calcul basé sur les fréquences (ou le bridge au télescope)

Situons nous **en début de coup , avant qu'aucune carte ne soit connue** .
Les mains possibles en Nord sont de la forme

NORD	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Où les 13X sont quelconques parmi les 26 cartes que les flancs se partagent

Donc, le nombre total des mains possibles en NORD est C_{26}^{13} (combinaison des 26 cartes du flanc 13 à 13) = **10.400.600**

On peut calculer le nombre de mains favorables à l'hypothèse ♠DV secs (mains de la forme

NORD	♠V	♠D	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

ou les 11x sont choisis parmi les 22 cartes du flanc qui ne sont pas de piques).

On trouve C_{22}^{11} combinaisons = **705.432**

ce qui définit la fréquence ou probabilité initiale de ♠DV secs comme

C_{22}^{11} / C_{26}^{13} = **6,8%** .

En ce qui concerne les valets secs : ils proviennent des mains de la forme

NORD	♠V	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

où les 12 x ne sont pas des piques.

Leur fréquence est C_{22}^{12} / C_{26}^{13} = **6,2%** .
Il en va de même des dames sèches. Fréquence **6,2%.**

À partir de là, le bridgeur peut adopter deux modes de raisonnement qui en fait sont équivalents :
● D'ordinaire, il assimile la probabilité à la rentabilité d'une stratégie appliquée à un grand nombre de donnes du même type. Il se voit jouer contre toutes les combinaisons possibles.
Il est exposé à **6,2 %** de valets secs, **6,2%** de dames sèches et **6,8%** de DV secs. Donc, il est exposé à plus d'honneurs secs (**12,4%**) que de DV secs (**6,8%)** et s'il fait l'impasse quand un honneur apparaît en Nord, il devrait capturer la dame environ deux fois sur 3 ou plus exactement 12,4 fois sur 19,2 ce qui donne à l'impasse une rentabilité d'environ **65%** largement supérieure au jeu de tête.
● Les « mathématiciens » tolèrent ce mode de raisonnement, qui semble découler du bon sens mais il ne reconnaissent pas au chiffre de **65%** ainsi calculé la valeur d'une probabilité. Pourquoi ? Parce que la probabilité est la science du possible et qu'elle interdit de comptabiliser des dames sèches en tant que cas favorables dés lors que la fourniture du valet exclut toute dame sèche. Qu'à cela ne tienne, les prétendus mathématiciens ont dans leur sac des tas de formules magiques pour justifier leurs convictions personnelles. Par exemple, ils vous diront que si Nord a DV, il va fournir le valet une fois sur deux, et que donc, lorsque le valet apparaîtra en Nord, il proviendra dans **6,2%** des cas d'un valet sec et dans **3,4%** de DV secs. Ce qui fait qu'il convient de comparer **6,2%** de valets provenant de valet sec à **3,4%** de valets provenant de DV secs, ce qui nous permet d'évaluer la probabilité de valet sec quand le valet est fourni à 6,2 / 9,6 soit encore **65%.**
Les conclusions sont le mêmes : il faut faire l'impasse.

Le mode de calcul basé sur les mains possibles (ou le bridge à la loupe)

Mais au fait, d'où sortent les chiffres de **6,2%** pour Valet sec ou dame sèche et **6,8%** pour DV secs qu'on a calculé au moment où l'on prenait connaissance du mort avant que le jeu de la carte ne commence ? C'est simple, on s'intéressait à la façon dont la distribution initiale des cartes, qui par hypothèse est parfaitement aléatoire, pouvait remplir son office.
On comptait toutes les mains possibles qu'elle pouvait donner en Nord : **10.400.600**.
On comptait parmi ces mains celles qui contenaient le valet de pique sec : **646.646** et on en déduisait que le probabilité d'un valet sec était 646.646 / 10.400.600 = **6,2%**.

Au stade où se pose le problème, si l'on formule la même question : combien la distribution aléatoire a – t – elle pu distribuer de mains possibles en Nord ? Les informations que nous avons sur cette main ayant progressé en quantité et en qualité, nous allons compter les mains dont la forme est

NORD	♣2	♣3	♣A	♦2	♠V	♥2	X	X	X	X	X	X	X

où les 7x sont quelconques parmi les **13** cartes non encore localisées (dont 12 ne sont pas des piques).
À ce stade on sait que Nord a et avait depuis le début de la donne une main de ce type.

soit C_{13}^{7} = **1716** jeux **possibles** et pas un de plus.

Parmi ces mains, les cas **favorables** à l'hypothèse **♠V** sec sont de la forme

NORD	♣2	♣3	♣A	♦2	♠V	♥2	X	X	X	X	X	X	X

où les 7x sont quelconques parmi les **12** cartes encore non localisées qui ne sont pas des piques.

On dénombre C_{12}^{7} = **792** cas favorables à cette hypothèse pour une probabilité de 792 / 1716 = 6/13 = **46%** .

Les cas favorables à l'hypothèse **♠DV** secs sont les jeux dont la forme est

NORD	♣2	♣3	♣A	♦2	♠V	♥2	♠D	X	X	X	X	X	X

où les 6 x ne sont pas des piques.

On dénombre C_{12}^{6} cas favorables pour une probabilité de C_{12}^{6}/C_{13}^{7} = 7/13 = **54%** .

Donc si vous aviez su au début du coup que Nord avait
♠V ♥2 ♦2 ♣ A32 et Sud **♠ 32 ♥ 3 ♦3 ♣RD4**
vous m'auriez dit que la probabilité d'une dame sèche était **0%** (et non pas **6,2%**),
vous m'auriez dit que la probabilité du partage 4-0 des piques (ou 3 en nord – 1 en Sud) était nulle et que le processus de distribution aléatoire avait moins de chances de situer un **valet sec** en Nord (probabilité **46%** et non plus **6,2%**) que **DV secs** en Nord (probabilité **54%** et non plus **6,8%**).
Là vous apprenez en cours de jeu que Nord a **♠V ♥2 ♦2 ♣ A32** et Sud **♠ 32 ♥ 3 ♦3 ♣RD4**. Vous l'apprenez à ce stade mais c'était aussi le cas au début du coup. Allez vous changer quelque chose à votre mode d'évaluation de la probabilité ? Non bien sûr.

Moyennant quoi vous allez tirer le ♠R en tête plutôt que faire l'impasse car, dans cette situation, Nord a plus de ♠DV secs que de ♠V secs.

Voilà comment vous auriez calculé la probabilité et comment vous auriez réagi si au lieu d'imaginer que vous étiez confronté aux **10.400.600** mains possibles au début du coup, vous vous étiez situé dans l'ensemble des **1716** mains possibles au stade où se pose le problème.
Voilà comment vous auriez réagi si vous aviez considéré que vous colleter aux **10.398.884** mains qui ont disparu du paysage des possibles et donc du calcul des probabilités ne présentait aucun intérêt au regard, du problème pratique qui se pose à vous.
Voilà comment vous auriez réagi, si au lieu d'accorder de l'importance à la façon dont l'adversaire fournit deux cartes équivalentes, vous aviez considéré que c'est **la distribution aléatoire** qui est la mère de toutes les probabilités au bridge et qu'à ce titre, c'est à ses mécanismes qu'il faut s'intéresser et non aux procédés de fourniture d'un adversaire qui ne peut qu'œuvrer au mieux de ses intérêts avec les cartes que la distribution aléatoire lui a données.
Car vous êtes confronté à une main et une seule. Celle que le sort a distribuée à Nord.
Vous êtes en train d'essayer de la reconstituer, petit à petit, comme un archéologue qui exhume un objet enfoui dans le sol et chaque nouvelle découverte, chaque carte fournie par les flancs apporte son lot de certitudes, vous permet de préciser le type de l'objet exploré et de prédire, grâce à votre connaissance des mécanismes quantitatifs mis en œuvre par la distributions aléatoire (l'artisan qui a produit l'objet exhumé), si la partie encore cachée de la main a telle configuration plutôt que telle autre et avec quelle probabilité.

Le crime de l'orient Express

Bien sûr, cela n'est pas suffisant pour ébranler vos convictions, façonnées par le flux normatif, unanime et incontesté d'un puissant courant orthodoxe.
Aussi, voilà ce que je vous propose en guise de hors d'œuvre, pour titiller votre doute : la parabole du train.

Au début de la donne, je constate que le sort de mon contrat dépend de ma capacité à faire toutes les levées à pique avec **♠AR1098** au mort et **♠7654** chez moi.
J'ai commencé à jouer une donne : en fait c'est comme si j'avais pris un train. Un train formé de deux rames, dont je connais tous les wagons mais pas la façon dont ils sont dispatchés entre les rames. Or c'est la répartition des wagons entre les rames qui m'intéresse dans la perspective de choisir la manœuvre de cartes la plus judicieuse quand un choix s'offrira à moi. Immédiatement après l'entame, je ne sais pas grand-chose de la composition des rames et de la localisation des wagons.

NORD													
SUD	♣R												

Les piques adverses sont comme ils sont depuis le début du coup. C'est **la distribution aléatoire** des cartes qui a décidé de leur emplacement.
Et une chose est sûre, la distribution aléatoire n'a pu faire son œuvre en prenant en considération la façon dont les adversaires fournissent leurs cartes puisqu'elle précède toute fourniture. **Alors si l'emplacement des cartes ne doit rien au comportement des joueurs, pourquoi serait ce le cas des probabilités ?** En d'autres termes, que l'adversaire puisse exercer un choix entre plusieurs cartes équivalentes et vous fasse visiter un wagon avant un autre ne peut pas avoir une influence sur la configuration du train.
La comparaison entre une donne et un train à pour but de vous faire comprendre qu'une fois monté dans le train, rien n'y personne ne peut en changer la composition. Les wagons sont là où ils sont et personne ne les changera de place. Tout ce que vous pouvez faire pour essayer de percer les secrets de votre donne, c'est prendre en compte les fait révélés par chaque levée

qui précisent la configuration des rames et vous demander, au départ, combien il pouvait y avoir de trains de ce type et parmi eux combien (quel ratio) vérifiaient l'hypothèse qui vous intéresse. C'est ce ratio et lui seul qui mérite le nom de « probabilité » à une table de bridge et d'ailleurs ce ratio est la définition même de la probabilité aux stades antérieurs, c'est-à-dire avant que ne débute le jeu de la carte.

Il arrivera que la nature des cartes fournies me donne des renseignements sur la composition du train, parce que le bridge a des règles et qu'on suppose (un peu abusivement) que les adversaires ne font rien qui pourrait aller à l'encontre des intérêts de leur camp. Par exemple si un adversaire fournit une dame qui aurait pu faire une levée sur un roi du déclarant, on supposera que cette dame est sèche, ou, si un adversaire défausse ou coupe on supposera qu'il n'a aucune carte dans la couleur parce que les règles du bridge l'obligent à fournir. Dans chaque cas, ces faits ont un impact relevant de la certitude sur les distributions adverses. Et la connaissance, même partielle, de ces distributions me permet de préciser les probabilités à chaque stade en dénombrant les mains possibles de ce type que la distribution aléatoire a pu fabriquer.

Ici par exemple nous pouvons déduire des règles d'entame (nous supposons que pour la paire Nord –Sud l'entame du roi promet la dame et dénie l'as) une précision sur la composition des rames qui dépasse le cadre habituel des cartes fournies :

NORD	♣A												
SUD	♣R	♣D											

Seul le Roi est fourni mais la Dame et l'As sont localisés.

Ce qui augmente, très légèrement et très provisoirement, la probabilité de la ♠D (ou d'une autre carte encore non localisée) de se trouver en Nord.

Mais observez que dans tous ces cas, c'est aux règles du bridge que vous faites confiance et pas au mode de fourniture de l'adversaire.

Et qu'à travers la fourniture, ces règles débouchent sur des certitudes concernant la composition de la main. Des certitudes du genre

« la probabilité pour que la ♣D soit en Sud après entame du roi est 100% », « la probabilité pour que cet honneur soit sec est 100% », « la probabilité pour que Sud ne possède pas de carte à cœur quand il défausse est 100% », « la probabilité pour que ce V provienne soit de DV soit de V sec est 100% ».

Une conjecture dont la probabilité n'est pas quantifiable comme « il y a de grandes chances pour que ce V provienne de V sec ou de DV secs mais après tout il pourrait bien provenir de V3 ou de DV3 » n'est pas exploitable. Nous devons soit considérer que V sec ou DV secs sont les seules possibilités, soit considérer que V sec, DV secs, V3 et DV3 sont également possibles, ce qui ne signifie pas que ces quatre évènements ont la même probabilité, mais que deux mains quelconques, qu'elles caractérisent le même évènement ou deux évènements différents sont également probables (ont la même probabilité, sont équiprobables). C'est le nombre de mains favorables à chaque évènement qui produit une estimation de la probabilité différente pour chacun d'eux.

Si les faits relevant de comportements obligatoires (règles d'entame, obligation de fournir, honneur sec ...) intègrent des certitudes à notre système de connaissance, toute interprétation des faits qui peuvent découler de l'exercice d'un choix (cartes équivalentes) relève de la psychologie et à ce titre, les maths avouent modestement leur incompétence à en quantifier les conséquences autrement que par une équiprobabilité des occurrences possibles. Seule certitude une carte a été fournie, et toutes les combinaisons qui permettaient au joueur de choisir cette carte sans trahir les intérêts de son camp sont équiprobables du point de vue des mathématiques.

Mais revenons à notre donne :

Tout ce que je sais au départ de la donne, c'est que les piques seront **4–0** dans environ **10%** des cas, **2–2** dans **40%** des cas et **3–1** dans **50%** des cas, ce qui me permet d'évaluer à ce stade à **40%** mes chances de gagner le contrat grâce au jeu de tête.

Un peu plus tard la situation est devenue la suivante :

NORD	**♣2**	**♣3**	**♣A**	**♦2**	**♠V**								
SUD	**♣R**	**♣D**	**♣4**	**♦3**	**♠2**								

Les choses ont évolué dans le bons sens. Dans le train que j'ai pris ....
Les piques ne sont pas **4–0.**
NORD ne peut plus avoir un singleton du 2 , du 3 ou de la D.
SUD ne peut plus avoir un singleton du 3, du V ou de la D.
2 combinaisons **4–0** et **6** combinaisons **3–1** ont donc disparu du paysage des possibles contre **2** combinaisons **2–2** seulement (V2–D3 et D3–V2).
Il ne fait aucun doute que **les chances du jeu de tête qui étaient initialement de 40% n'ont pu qu'augmenter**.

● Si l'on considère qu'un Nord facétieux a pu fournir le V avec V sec, VD , V3 , VD3 (ce qui ne serait contraire ni aux règles du bridge ni aux intérêts du camp Nord – Sud), on peut calculer que parmi tous les trains initialement possibles, il n'en reste que **13,6%** où les piques sont 2–2 et **12,4%** où les piques sont 3–1 ce qui situe autour de **52,3%** la probabilité d'un partage **2–2**.
● Si l'on considère que ce V provient soit de DV soit de V sec, parmi tous les trains initialement possibles, il n'en reste que **6,9%** où les piques sont 2–2 et **6,2%** où les piques sont 3–1 ce qui situe la probabilité d'un partage 2–2 autour de **52,3%.**

Cela n'a rien d'étonnant, lorsqu'on sait qu'au début du coup la probabilité du partage **1–1** de l'ensemble formé par la ♠D et le ♠3 était de **52%** et que la réduction équitable ses places vacantes ne peut qu'augmenter cette probabilité en cours de donne. Certes fournir 2 piques modifie légèrement cette probabilité mais pas plus que si l'on avait fourni 2 cœurs, 2 carreaux ou 2 trèfles car ce lien entre les cartes que constitue la couleur n'existe que dans l'esprit des bridgeurs. Pour le mathématicien, il ne s'agit que d'un groupement arbitraire de 2 cartes, dont les règles d'évolution en cours de donne ne sont pas différentes de celles d'un autre groupement arbitraire de 2 cartes.

Supposons maintenant que ce Valet ne puisse pas provenir de V3 ou DV3 et situons nous dans la perspective d'un choix restreint, comme c'est généralement le cas dans la littérature du bridge. Convenons que ce valet ne peut provenir que de V sec ou de VD.

Question : s'il est évident à ce stade que la probabilité d'un partage 2–2 des piques dans la donne qui nous intéresse n'a pu qu'augmenter par rapport à sa valeur initiale qui était de **40%**, comment se fait – il que les partisans du moindre choix trouvent déjà à ce stade une probabilité inférieure à ce qu'elle était au début du coup (**35%**) ?
Cela ne va-t-il pas à l'encontre de la logique élémentaire de nos observations ?

Un peu plus tard

NORD	**♣2**	**♣3**	**♣A**	**♦2**	**♠V**	**♥2**	**?**						
SUD	**♣R**	**♣D**	**♣4**	**♦3**	**♠2**	**♥3**	**♠3**						

Plus de doute : Nord a soit le V sec soit VD. Parmi les trains possibles dans lesquels j'ai pu monter **52,3 %** étaient favorables à la répartition 2–2, ce qui milite (de peu, reconnaissons – le) en faveur du jeu de tête.

Et encore, ce calcul est légèrement faussé car nous avons négligé (à tort) les 10 cartes autres que du pique qui ont été fournies. Si on les prenait en compte dans le calcul , la probabilité du partage 2–2 augmenterait encore et pas besoin d'être un génie pour prévoir que cette probabilité pourrait atteindre **100%** si notre problème se posait à 2 cartes de la fin et qu'on commence à manier les piques à ce moment là.

Le moindre choix (**35%** de répartitions 2–2) persiste dans l'erreur qui consiste à refuser la mécanique d'évolution des possibles et l'évidence que la probabilité de la répartition 2–2 des piques n'a pu qu'augmenter en cours de donne d'une levée à l'autre.
Un crime devant les mathématiques, un mystère devant la logique : le crime de l'orient express.
Mais notre train fonce vers la vérité de toute la force de ses chevaux vapeur, méprisant les élucubrations des faux prophètes et les aiguillages fantômes du moindre choix qu'ils ont mis sur sa route. Et s'ils ont commis une erreur en oubliant de composter leur billet au guichet des mathématiques orthodoxes, Hercule Poirot ne devrait pas tarder à le démontrer.

Nous avons donc un problème : pour calculer une probabilité au bridge est ce qu'il faut se fier à la façon dont la distribution aléatoire a fait son œuvre ou est ce qu'il faut se fier à la façon dont un joueur fournit ses cartes ?
Bridge à la loupe ou bridge au télescope ? Il nous appartient maintenant d'examiner ces deux façons de procéder au calcul des probabilités à la lumière des règles des mathématiques et de rendre un arbitrage.
Un seul des ces procédés de calcul est pertinent.
Lequel ?

La loi de Bayes sur la sellette.

La théorie du moindre choix a été popularisée par un anglais, Terence Reese, mais auparavant un mathématicien français, Emile Borel, avait posé les fondements de cette loi en appliquant la loi de BAYES aux situations de bridge. À ma connaissance, c'est lui qui le premier a prétendu qu'il fallait prendre en compte le mode de fourniture des joueurs pour calculer une probabilité dite « psychologique », plus pertinente, selon lui, que la probabilité « mathématique » dans de nombreuses situations. Voici, pour commencer un portrait de notre héros national, emprunté au site Internet de l'excellente librairie et maison d'édition « Jacques Gabay » à Paris.

Émile Borel (7 janvier 1871 [Saint-Affrique, Aveyron] - 3 février 1956 [Paris])

Émile Borel est né le 7 janvier 1881 dans le village de Saint-Affrique, dans l'Aveyron. Enfant prodige, passionné par les mathématiques, il reçoit une bourse pour le lycée Louis-le-Grand, et à 18 ans, il est reçu 1er au Concours Général, à l'Ecole Polytechnique, et à l'Ecole Normale Supérieure. En accord avec son père, il opte pour cette dernière, car l'argent et les mondanités l'intéressent moins que la recherche. Plus tard, il épouse la fille du grand mathématicien Appell, qui se fit connaitre, sous le pseudonyme de Camille Marbo, pour ses romans.

Avant même d'avoir soutenu sa thèse, il est nommé à 22 ans maître de conférences à Lille, puis à 26 ans à l'Ecole Normale Supérieure : il ne devait alors plus quitter Paris. Emile Borel est un mathématicien constructiviste, et, avec Baire et Lebesgue, il est le fondateur de la théorie de la mesure et de l'étude moderne des fonctions. Il entreprend d'ailleurs une *Collection de monographies sur la théorie des fonctions* qui comprend 50 volumes, dont 10 rédigés par lui-même. Borel est aussi le premier à entreprendre une étude systématique des séries divergentes.

Après la Première Guerre Mondiale, Borel obtient la chaire de Calcul des Probabilités, et il consacre son énergie à développer ce domaine et ses liens avec la physique mathématique. D'ailleurs, il est pour beaucoup dans la création de l'Institut Henri Poincaré, en 1928, consacré justement à ces deux disciplines. Parallèlement à sa carrière scientifique, Borel reçoit de nombreux honneurs, dont les plus importants sont son élection à l'Académie des Sciences en 1921, et la médaille d'or du CNRS qu'il est le premier à recevoir en 1955.

S'il n'aimait pas les mondanités, Borel, curieux dans tous les domaines, n'en fréquentait pas moins les intellectuels de l'époque, comme le poète Paul Valéry, ou le Président de la République Paul Painlevé. A la guerre 1914-1918, il insiste pour être envoyé au front, et son action courageuse lui vaut la Croix de Guerre. Son amitié avec Painlevé le conduit à s'engager en politique : à compter de 1924, il est pendant 12 ans député de l'Aveyron, et même quelques mois ministre de la marine. En 1941, il est emprisonné un mois par les Allemands, comme 4 autres membres de l'Académie des Sciences. Il ne se remettra jamais totalement de cette épreuve. Il décède le 3 février 1956 à Paris.

Emile Borel a publié en 1940 une « Théorie mathématique du bridge à la portée de tous » en collaboration avec un bridgeur qui s'appelait André Chéron. C'est de cet ouvrage que nous tirons nos sources.

Le problème étudié par Borel est le suivant :
On dispose de 6 cartes : RV d'une couleur (♥) et 2, 3, 4, 5 d'une autre couleur (♠).
On les distribue de façon aléatoire : 3 à Est – 3 à Ouest
La probabilité de trouver RV rassemblés dans une même main est **40%**.
La probabilité de trouver le R dans une main et le V dans l'autre est **60%**.
Le déclarant joue ♠, Est – Ouest fournissent. Les probabilités sont – elles modifiées ?
Borel examine successivement 3 hypothèses :
1 Est et Ouest jettent indifféremment leurs piques, au hasard
2 Est et Ouest jettent toujours la plus faible carte qu'ils possèdent
3 Est et Ouest jettent toujours la plus faible carte, sauf si leur deux plus basses cartes se suivent : dans ce cas ils jettent indifféremment l'une ou l'autre.

Cas 1

Est a joué le ♠2 et Ouest le ♠3. Ces cartes sont aléatoires.
Du point de vue des mains possibles Est ne pouvait avoir en début de coup que
245 24V 24R 25V 25R 2**RV**
Donc la probabilité pour qu'il ait RV est passée de **20%** à 1/6 soit **16,7%.**
Du point de vue des fournitures possibles, laissons le micro à Borel :
« La faute de raisonnement (de l'évaluation précédente) provient de ce qu'on tient seulement compte de la probabilité d'entrée en jeu de la cause : Est recevra RV2, 5 fois sur 100. On oublie de tenir compte de la probabilité que, la cause étant entrée en jeu, c'est-à-dire Est ayant reçu RV2, Est et Ouest jouent tous deux comme ils l'ont fait. Voici maintenant le raisonnement correct qui consiste à appliquer la formule de Bayes…»
Et Borel nous explique que si Est a RV2 la probabilité pour qu'il joue le 2 est 1, tandis que la probabilité pour qu'Ouest joue le 3 est 1/3 puisqu'il a 3 petites cartes.
Si on passe en revue de la même façon les 6 mains possibles pour Est et qu'on s'intéresse à toutes les possibilités de fournitures, on verra que sur les cas où le 2 et le 3 sont fournis, la fréquence de RV en Est sera 1/5 soit **20%** c'est-à-dire exactement ce qu'elle était au début du coup.
Détail du calcul :

EST	OUEST	P(main)	P(2,3 fournis)	P(main ET 2,3 fournis)	TOTAL
245	3RV	1/6	1/3	1/18	4/18
24V	35R	1/6	1/4	1/24	
24R	35V	1/6	1/4	1/24	
25V	34R	1/6	1/4	1/24	
25R	34V	1/6	1/4	1/24	
2**RV**	345	1/6	1/3	1/18	1/18

Au total probabilité d'avoir une des mains possibles et de fournir le 2 en Est et le 3 en Ouest = 5/18
Probabilité d'avoir RV en Est quand le 2 et le 3 sont fournis par les mains de l'exemple = 1/18 divisé par 5/18 = 1 / 5 = **20%**
Bien sûr pour que ces chiffres soient valables, il faut que d'autres cartes soient fournies avec les mains possibles, par exemple avec 245 pour 3RV, le 5 et le 3 peuvent être fournis. Mais ces cas sont négligés. Nous ne nous intéressons qu'aux cas où comme dans notre problème, le 2 et le 3 ont été fournis.

Cas 2

Est et Ouest jouent leur plus basse carte.
Borel étudie les cas les plus intéressants et nous donne les probabilités suivantes :

Carte jouée par ….		RV en E	R en E	V en E	
Est	Ouest		V en O	R en O	RV en O
2	3	16,7%	33,3%	33,3%	16,7%
2	4	0	33,3%	33,3%	33,3%
2	5	0	0	0	100%

Cette fois, la hauteur de la carte jouée par Ouest nous permet de situer de 0 à 2 cartes en Est et en reconstituant **les mains possibles**, on trouve les résultats donnés par Borel.
Par exemple, si Ouest fournit le 5 , comme il n'a pas de carte plus petite, on est certain que ce 5 provient de RV5.
Quand le 2 et le 3 sont fournis on retrouve les probabilités basées sur les mains possibles.

Cas 3

Si les plus basses cartes se suivent, on fournit au hasard, sinon, on fournit la plus petite.
Borel détaille les cas suivants :

Carte jouée par ….		RV en E	R en E	V en E	
Est	Ouest		V en O	R en O	RV en O
2	3	7,7%	34,6%	34,6%	23,1%
2	4	14,3%	32,1%	32,1%	21,4%
2	5	28,6%	21,4%	21,4%	28,6%
3	4	0%	25%	25%	50%
3	5	0%	30%	30%	40%
4	5	0%	0%	0%	100%

Borel démontre ces résultats en mâtinant probabilité de situation et loi de Bayes.
Nous vous épargnerons le détail de ce calcul qui ne revêt pas un grand intérêt.

À une autre occasion Borel précise :
« Les déclarations, d'abord, l'entame et le jeu de la carte ensuite, nous fourniront des renseignements de plus en plus précis **desquels nous tiendront compte en éliminant les hypothèses incompatibles avec ce que nous avons appris** ; mais qui avaient dû être envisagées comme possibles au début, dans les calculs faits avant la donne. Nous aurons aussi à tenir compte de la psychologie des joueurs, c'est à dire de la probabilité des causes. Nous nous demanderons, **en supposant que tel joueur a bien reçu telle combinaison donnée de cartes**, quelle est la probabilité pour qu'il joue comme il a joué. Et l'application de la formule de Bayes nous permettra enfin de remonter à la véritable probabilité à posteriori : celle que l'effet observé soit bien du à la cause. »

Cet exemple et les citations qui l'accompagnent sont nécessaires à la compréhension de notre propos. Néanmoins, ce n'est pas sur cet exemple que nous allons fonder notre démonstration mais sur celui que nous avons choisi pour illustrer le moindre choix.
Si nous en revenons aux 1716 mains possibles pour Nord au moment où se pose notre problème, Borel aurait convenu qu'il y avait bien 1716 mains possibles, 792 avec valet sec et 924 avec DV secs, mais il nous aurait dit : « supposons que nous donnions à Nord les 1716 mains possibles et qu'il fournisse le valet une fois sur deux avec DV secs. Ce valet va être fourni 792 fois avec le Valet sec et 462 fois avec DV secs. Donc, on voit le valet apparaître 1254 fois et quand il apparaît, la probabilité pour qu'il provienne de V sec est 792/1254 soit **63%**» .
Retour à la case départ.
Nous avons donc deux procédés mathématiques qui donnent des conclusions différentes :
● celui basé sur le dénombrement des mains possibles et parmi elles de celles qui sont favorables à notre hypothèse donne une probabilité de **46%** pour le valet sec et préconise le jeu de tête.
● celui qui fait intervenir le mode de fourniture des cartes à partir des mains possibles donne une probabilité de **63%** pour le valet sec et préconise de faire l'impasse.
Est – il possible que les mathématiques permettent de démontrer une chose et son contraire ?
Non car les mathématiques évitent les contradictions de ce type en nous prévenant qu'elles ne sont judicieuses que dans le cadre d'une axiomatique qui définit en préalable le référentiel dans lequel on les applique.
S'il existe d'apparentes contradictions, c'est forcément dans le cadre de deux référentiels différents, ce qui invalide la pertinence du mot « contradiction ».

Le viol de l'axiomatique

Il faut comprendre que la notion de probabilité n'est pas l'apanage exclusif des mathématiciens.
Quand vous dîtes « la probabilité que j'entre à l'académie française est faible » il va de soi que vous faites un usage légitime de ce terme mais que son emploi ne vous oblige à aucune quantification, et que l'évènement auquel il fait référence (entrer à l'académie française) n'a pas à appartenir à une famille d'évènements dont il faut comparer les possibilités respectives en leur affectant un nombre compris entre 0 et 1.
En d'autres termes, la probabilité à laquelle vous faites allusion n'est pas du domaine des mathématiques.
L'existence d'un domaine mathématique repose toujours sur une axiomatique qui définit les objets basiques et les situations à partir desquels on peut développer un concept selon des règles logiques, c'est-à-dire consensuelles.
.
En probabilités, il existe aussi une axiomatique qui est l'œuvre de Kolmogorov. Elle a vu le jour en 1933, un peu avant que Borel ne publie son livre sur le bridge et il semble que le bel Emile en ait délibérément ignoré les conclusions.
C'est bien dommage pour le bridge et pour les bridgeurs.

Kolmogorov nous apprend qu'avant de calculer une probabilité, il nous faut définir l'espace de probabilités dans lequel on se situe, c'est-à-dire

● l'ensemble des évènements élémentaires Ω (qu'on appelle aussi « ensemble des possibles »)

● les classes d'évènements élémentaires qui sont les sous ensembles de Ω sur lesquels on peut mesurer une probabilité où une fréquence

● Et enfin, il nous faut un procédé de calcul ou d'évaluation qui permet d'affecter à toute classe un nombre compris entre 0 et 1, vérifiant certaines propriétés et qu'on appelle probabilité ou fréquence d'un caractère dans cette classe.

Ce n'est qu'après avoir défini cet espace (doté des propriétés qui font de lui ce que les mathématiciens appellent « une tribu ») et l'avoir doté d'un mode de calcul de la probabilité (lui aussi doté de certaines propriétés) que le mot « probabilité » perd son sens trivial pour entrer dans le domaine des mathématiques.

Lorsque Borel ou la théorie actuelle du bridge, calculent des probabilité avant qu'aucune carte ne soit jouée, il ne fait aucun doute qu'ils utilisent comme référentiel **l'ensemble Ω des mains possibles**, que les classes sont des parties de Ω qu'on définit comme on veut (les mains contenant 4 trèfles, les mains comportant une chicane pique, les mains contenant au moins 3 carreaux, les mains contenant la ♠D, les mains contenant ♠V ♥2 ♦2 ♣ A32 …) et que le procédé de calcul de la probabilité consiste à établir la proportion des mains vérifiant une hypothèse parmi les mains possibles.
Par contre, lorsqu'ils calculent en cours de jeu une probabilité de Bayes, l'évènement élémentaire cesse d'être la main possible.
Dans le cadre de l'expérience décrite par Borel, un évènement élémentaire est la conjonction d'une main possible et d'une fourniture possible. Ce qui signifie que le référentiel dans lequel on se place est **l'ensemble des mains possibles dotées d'un caractère, la fourniture de la dame ou du valet, qui n'existait pas aux stades précédent** ce qui prouve qu'en terme de probabilités, nous ne nous situons plus dans le même univers.
Fournir le Valet est devenu un **attribut** de la main. Il y a les mains possibles avec lesquelles on fournit le Valet et les mains possibles avec lesquelles on fournit la dame. Et le seul fait que cet attribut n'existe pas avant que le premier tour de pique ne soit donné, devrait vous faire toucher du doigt que les référentiels dans lesquels on calcule la probabilité avant et après le premier tour de pique sont différents et que c'est abusivement qu'on amalgame et qu'on compare le résultat des calculs qui en découlent.
Pour calculer une probabilité selon Borel, non seulement il faut donner aux joueurs des mains possibles mais il faut leur faire fournir des cartes selon un processus mécanique préétabli.
Et c'est sur les cas où les cartes effectivement jouées dans la donne seront fournies qu'on établira la fréquence de la carte recherchée dans l'une des mains qui a fourni.
Si la probabilité que nous calculons est amalgamée à <u>une fréquence de donnes</u> jouées à partir des mains possibles, c'est que nous nous situons dans un **univers de donnes** et non dans **un univers de mains possibles**.
Dans un univers de donnes on peut effectivement considérer la fourniture (qui peut varier d'une donne à l'autre) comme un caractère de chaque donne mais ce n'est pas le cas dans un univers de mains. C'est donc que le référentiel choisi par Borel pour calculer sa « probabilité psychologique » n'est pas le même que celui qu'il utilisait aux stades précédents. Or, quand La loi de Bayes préconise de multiplier ou diviser deux probabilités pour en trouver une 3^{e}, **il ne fait aucun doute que toutes ces probabilités doivent être issues du même référentiel et caractériser le même univers.**

L'axiomatique des probabilités interdit bien sûr de comparer (d'amalgamer) deux probabilités issues de deux référentiels différents.
Tout simplement parce que ce n'est pas la même probabilité qu'on calcule. Quand ce n'est pas la même chose qu'on mesure et qu'on ne le mesure pas dans le même référentiel, la comparaison des mesures n'a aucun sens.
Borel et les théoriciens du bridge n'ont pas eu conscience qu'en le faisant, ils galvaudaient les principes de la logique élémentaire.

.

Pour vous faire sentir à quel point une probabilité de Borel est différente des probabilités que vous calculez habituellement, combien elle s'oppose au concept intuitif qui est le vôtre, il vous suffit de réfléchir à la façon dont d'ordinaire vous « visualisez » la probabilité.
Supposons que vous cherchiez à évaluer la probabilité de la dame de pique en Ouest
● Au début du coup, avant qu'aucune carte ne soit jouée, vous voyez défiler toutes les mains possibles en Ouest, et vous savez que la dame se trouvera dans cette main une fois sur deux. Probabilité 50%.
● Si on vous dit que les cœurs sont 4-0 (4 en Est – 0 en Ouest), vous voyer défiler toutes les mains possibles avec une chicane cœur en Ouest et vous vous rendez aux conclusions de la loi des places vacantes à savoir, la ♠D est en Ouest 13 fois sur 22. Probabilité 59%.
● Si on vous dit que les piques sont 4 en Est et 3 en Ouest, vous voyez défiler toutes les donnes où les piques sont 4-3 et vous en déduisez que la dame sera en Ouest 3 fois sur 7. Probabilité 42%.

Donc, vous amalgamez la probabilité à la fréquence de la dame dans le défilé de toutes les mains possibles (dans le réservoir des mains qui alimente votre expérience en fréquence).
► Dans l'interprétation Borélienne du moindre choix, vous avez vu défiler 1716 mains possibles, 792 avec valet sec et 924 avec DV secs, Donc la fréquence de DV secs était **54%**. Pourtant, la loi de Bayes vous la fait apprécier à **37%**. Vous conviendrez que cette probabilité n'est pas du même type que celle que vous calculez habituellement et vous vous interrogerez sur la pertinence du changement qui s'est opéré dans vos convictions.

Pourquoi les mathématiques vous donnent elles deux probabilités dans la situation de l'exemple. ? Tout simplement parce que les prémices définissant chacune d'elles sont incompatibles. Le processus qui consiste à amalgamer deux probabilités provenant de référentiels différents est mathématiquement incorrect.

fourniture aléatoire ou fourniture inconnue ?

Mais si Borel a des circonstance atténuantes parce qu'il s'entoure de précautions : il raisonne à partir des mains possibles et souligne que selon le processus de fourniture qu'on prête aux adversaires on calculera des probabilités différentes ce n'est plus du tout le cas de la théorie mathématique du bridge actuelle, impulsée notamment par Terence Reese, qui commet deux irréparables sacrilèges :
● Elle greffe une probabilité calculée dans un univers de donnes sur une probabilité calculée dans un univers de mains, ce qui signifie qu'elle combine sans pudeur deux procédés contradictoires utilisant des référentiels différents dans une même situation et néglige toutes les restrictions des possibles qui résultent des cartes jouées.
● Elle élude les réserves légitimes fondées sur la connaissance du mode fourniture des adversaires.
Ce qui signifie que là où Borel (qui calcule une probabilité différente dans chacun des 3 cas de son exemple) nous aurait dit :
« si l'adversaire fournit le valet une fois sur deux, la probabilité du valet sec sera **63%**, si l'adversaire fournit toujours le valet avec valet dame, la probabilité de valet sec sera **46%** »

la théorie actuelle nous dit
« un bon joueur fournissant le valet de valet dame une fois sur deux, voilà quelle est la probabilité de valet sec ».

Voici quelques remarques destinées à contester vigoureusement le postulat selon lequel on connaît la stratégie de fourniture des adversaires, sur lequel repose la loi de Bayes.
● connaissez vous beaucoup de joueurs qui exposés à un choix parmi n cartes « inutiles » tirent au sort la carte qu'ils vont fournir ou défausser ?
Etes vous sûr qu'ils ne fournissent pas la plus petite, la plus grosse, l'intermédiaire, la carte qui donnera un signal, parité, appel / refus, préférentiel ?
● Je ne vous ferai pas l'injure de vous expliquer la différence entre « fourniture aléatoire » et « fourniture inconnue » et je vous invite à réfléchir sur l'incongruité qu'il y a à imaginer que vous jouez plusieurs fois une même donne, ce qui est nécessaire pour que la fourniture aléatoire ait un sens, alors que vous vous situez dans le cadre d'une partie de bridge qui vous confronte à l'une des 53.644.737.765.488.792.839.237.440.000 donnes que le battage aléatoire des cartes peut produire dans sa prolifique luxuriance
Il vous sera difficile d'en jouer une plusieurs fois.
● Les chances pour que nous nous trouvions deux fois confrontés au même adversaire dans les conditions de la donne sont nulles. Comment son mode de fourniture pourrait – il avoir un impact sur notre probabilité si il ne fournit qu'une fois ?
● Ensuite, pour que les conclusions de la loi soient fiables, il faudrait que nous connaissions le mode de fourniture non pas d'un adversaire mais des deux.
● Enfin, même si vous connaissiez le mode de fourniture des adversaires, il suffirait qu'ils en changent dans la donne qui vous oppose à eux pour que la probabilité que vous calculez ne veuille plus rien dire ce qui suffit à prouver son inanité.
En gros si l'adversaire vous dit « avec VD dit je fournis le valet une fois sur deux » vous faites l'impasse et s'il vous dit « avec VD je fournis toujours le valet » vous tirez en tête.
En principe les probabilités devraient vous aider à prendre des décisions opportunes faces aux cachotteries de vos adversaires, si en tant qu'adepte du moindre choix vous permettez à l'adversaire d'être le maître de vos probabilités en fonction de l'attitude qu'il prétend adopter avec VD, cela ne va pas tout à fait dans le sens souhaité. En avez-vous conscience ?

Supposer que nous connaissons la stratégie de fourniture des adversaires est évidemment une assertion dénuée de sens.
Les adversaires fournissent comme ils veulent et nous ne savons pas comment ils fournissent.
La stratégie de fourniture des adversaires est **inconnue** et non pas aléatoire.
Le bon joueur est celui dont on ignore le mode de fourniture.

Des lunettes opaques pour le prix de lunettes transparentes ? Il est fou Borélou, il est fou !

Pour achever de démontrer l'imposture que constitue l'utilisation de la loi de Bayes en matière de bridge, intéressons nous d'un peu plus prés à l'expérience sur laquelle s'appuie Borel pour étayer ses convictions.
Nous sommes bien d'accord : le projet inhérent à l'utilisation de la loi de Bayes est de démontrer que lorsque le valet apparaît dans la situation de l'exemple, la fréquence de valet sec dans la main qui l'a fourni est plus importante que la fréquence de DV secs, mais à condition qu'on puisse tirer le mêmes conclusions de l'apparition de la dame : elle est plus souvent sèche qu'accouplée à un valet.
Or, nous savons que dans le réservoir de donnes dans lequel Borel s'alimente (celui des mains possibles) il y a plus de DV secs (54%) que de Valets secs (46%). Comment Borel parvient – il à démontrer le contraire ?

C’est simple, en faisant fournir le valet une fois sur deux avec VD, il superpose à la situation réelle un filtre particulièrement perméable aux valets secs.
C’est comme s’il vous mettait des lunettes opaques aux DV secs.
Comment fonctionnent ces mystérieuses lunettes ?
Dans une situation de bridge, il n’y a pas un cas où, ayant adopté la loi de Bayes et voyant apparaître le valet ou la dame, vous ne déduirez pas de son apparition que l’honneur sec est plus probable que DV secs. Ici quand vous voyez apparaître le valet, vos conclusions sont justes puisque vous voyez apparaître le valet 1254 fois et il provient 792 fois de valet sec. Mais quand vous voyez apparaître la dame ? Vous la voyez apparaître 462 fois, vous en déduisez 462 fois qu’elle provient plus probablement de Dame sèche que de DV secs alors qu’elle ne provient **jamais** de Dame sèche. Elle provient **toujours** de DV secs.

Le voilà ce fameux filtre : pour démontrer que lorsqu’un honneur apparaît la fréquence de cet honneur sec est supérieure à la fréquence des deux honneurs secs, Bayes utilise une expérience truquée où cette proposition n’est vraie que lorsque c’est le valet qui apparaît.

Pour qu’une expérience en fréquence prétende illustrer un calcul de probabilité dans une donne, il faut qu’elle soit compatible avec toutes les conclusions du calcul et il faut qu’elle reproduise toutes les certitudes de notre donne. Et qu’est ce qui fonde les certitudes dans notre donne ? C’est la fourniture de cartes. C’est pour respecter cette contrainte, que Borel qui est professeur de probabilités, se situe dans l’ensemble des mains possibles.
Mais que fait – il quand il suppose que le joueur pourrait fournir la dame à la place du valet ? Ne substitue – t –il pas à une certitude (ce valet a été fourni) une possibilité (la dame pourrait l’être à sa place). Comment la fourniture de la dame pourrait – elle être compatible avec la certitude que le valet a été fourni dés lors qu’on ne fournit qu’une carte à la fois et qu’on n’évalue la probabilité qu’une fois qu’elle a été fournie.
● si quand la dame est fournie on sait qu’elle accompagne le valet, cela ne correspond pas aux conditions dans lesquelles se déroule une donne de bridge et l’expérience en fréquence ne peut pas se prévaloir de la compatibilité nécessaire avec notre donne (ni avec notre jeu).
● Si quand la dame est fournie, on ne sait pas où se trouve le valet et qu’on calcule une probabilité non nulle pour la dame sèche alors qu’elle ne l’est **jamais** , c’est le processus d’évaluation de la probabilité qui est bancal.

Donc l’expérience en fréquence proposée par Borel est impropre à justifier une probabilité dans une donne de bridge et on peut démontrer que c’est le cas de toutes les expériences en fréquence qu’on pourrait imaginer pour justifier l’emploi de la loi de Bayes.

● Soit on se situe dans **l’ensemble des mains possibles une fois que le valet a été fourni**, comme le fait Borel, et l’expérience révèle les incohérences que nous venons de mettre en lumière.
● Soit on se situe dans **l’ensemble des mains qui étaient possibles avant que le valet ne soit fourni** c'est-à-dire dans un réservoir de donnes où une dame sèche est aussi fréquente qu’un valet sec et dans ce cas la probabilité de Bayes aura un sens, l’expérience ne révèlera aucune incohérence mais elle ne pourra prétendre en aucun cas illustrer une probabilité dans une donne de bridge.
Car une expérience qui met à notre disposition un réservoir où il y a des D sèches, des V secs et des DV secs, n’a rien à voir avec une donne de bridge ou D sèche et V secs sont mutuellement exclusifs.

Equiprobabilité.

Au début du coup, avant qu'aucune carte ne soit fournie, toute main de Nord constituée de 13 cartes du flanc est équiprobable à une autre.
D'où provient l'équiprobabilité des mains ? **De l'égalité des cartes devant la distribution aléatoire**.
Chaque carte, quelle qu'elle soit, à les mêmes chances qu'une autre de se situer dans une main donnée. Il faut chercher l'origine des différences de probabilités entre les deux mains du flanc, exclusivement dans la différence du nombre de cartes inconnues (autrement dit du nombre de places vacantes) qu'elles comportent.

À la fin de la première levée la situation est la suivante :

NORD	**♣2**	**♣A**											
SUD	**♣R**	**♣D**											

D'après les conventions d'entame de la paire, on sait que le Roi promet la Dame et dénie l'As.
Une levée avant, il était possible que le ♣2 , le ♣R , la ♣D et le ♣A soient dans n'importe quelle main maintenant ce n'est plus le cas.
Une main situant le ♣R était équiprobable, en Nord à une main ne le contenant pas. Maintenant ce n'est plus le cas.
Une main ne contenant pas le ♣2 ou le ♣A, une main contenant le ♣R ou la ♣D sont devenues impossibles en Nord.
Mais est ce que vous allez considérer qu'une main telle que ♠DV ♥542 ♦76542 ♣A32 est moins probable en Nord qu'une main telle que
♠DV ♥6542 ♦ 76542 ♣A2 sous prétexte qu'avec le ♣2 sec Nord était obligé de le fournir tandis qu'avec ♣A32 il pouvait fournir le ♣3 ou le ♣2 ?
Non bien sûr, ces deux mains ne diffèrent que par une carte. L'une contient le ♥6 et l'autre le ♣3. Ce qui détermine l'équiprobabilité des mains c'est, nous l'avons dit, l'égalité des cartes devant la distribution aléatoire et de ce point de vue, Nord avait autant de chances de recevoir le ♥6 que le ♣3 puisque ce sont des bouts de carton comme les autres.
Et cela est vrai quel que soit le nombre de cartes différentes de deux mains de Nord à condition qu'il s'agisse de mains possibles.
Ce qui fait que ces deux distributions, comme toutes les distributions possibles en Nord sont toujours équiprobables.
Mais leur nombre a diminué et leur probabilité <u>individuelle</u> a augmenté.

À la fin de la 3^{e} levée la situation est la suivante :

NORD	**♣2**	**♣3**	**♣A**										
SUD	**♣R**	**♣D**	**♣4**										

6 des 7 trèfles du flanc sont connus. Seul manque le ♣5.
Allez vous estimer qu'un main avec ♣A32 est plus probable en Nord qu'une main avec ♣A532 parce que avec 532 Nord aurait pu fournir 53 , 52 , ou 32 aux deux tours précédents alors qu'avec A32 il était obligé de fournir le 3 et le 2 ?
Non bien sûr.
D'un part parce que l'équiprobabilité des cartes et donc des mains possibles découle de la distribution initiale et qu'à ce titre, elle ne peut être influencée par un fait postérieur comme la fourniture. Tout ce que fait la fourniture c'est rayer des distributions de la carte des possibles mais elle n'a pas la possibilité de moduler la probabilité des combinaisons restant possibles.
D'autre part parce que si vous considériez que le ♣5 est plus probable en Sud qu'en Nord ce serait toutes les probabilités qu'il faudrait revoir, même celles que vous considérez comme paroles d'évangile et par exemple, il serait facile de démontrer qu'à ce stade, la probabilité de la ♠D en Nord ne serait pas 50% .

Car ce qui fait que la ♠D a les mêmes chances de se trouver en Nord ou en Sud, c'est que le nombre de mains possibles qu'on peut imaginer avec la ♠D est le même en Nord et en Sud et que toutes sont équiprobables. Si vous mettez le ♣5 plus souvent en Sud qu'en Nord, il limite les possibilités d'hébergement de la ♠D dans la main de Sud et il favorise sa localisation dans la main de Nord. Et si vous dénombrez moins de mains possibles avec la ♠D en Sud qu'en Nord, c'est que la probabilité de la ♠D en Nord ou en Sud, n'est pas 50% .
Donc, à ce stade encore, pour un tas de bonnes raisons, l'équiprobabilité des mains possibles en Nord semblerait de mise et ce serait encore le cas lorsque nous parvenons à la situation suivante :

NORD	♣2	♣3	♣A	♦2									
SUD	♣R	♣D	♣4	♦3									

À la fin de la 4e levée, toutes les distributions possibles en Nord seraient équiprobables.

Mais selon vous tout changerait à la levée suivante

NORD	♣2	♣3	♣A	♦2	♠V								
SUD	♣R	♣D	♣4	♦3	♠2	♠3							

Après le premier tour de pique vous avez détecté que le V provient soit de V sec soit de VD, ce qui revient à situer avec certitude le ♠3 en Sud.
En Nord on peut construire **3003** mains possibles avec V sec et **3432** mains avec DV secs.
Mai vous décrétez qu'avec DV nord ne fournit le V qu'une fois sur deux et que donc il convient de comparer 3003 mains avec V sec et 1716 mains avec DV secs, ce qui donne votre estimation de la probabilité de DV en nord : 1716 / (1716 + 3003) = environ 36% .
Ce qui revient à décréter que, par exemple
♠DV ♥542 ♦76542 ♣A32 est <u>moitié moins probable</u> en Nord que ♠V ♥6542 ♦76542 ♣A32.
Leur probabilité respective étant 1 / 9438 pour la première et 1 / 4719 pour la seconde.

Ce qui m'amène à vous poser les questions suivantes :
Ces deux mains étaient équiprobables au stade précédent. Et elles l'étaient pour une raison qui tient à la façon dont les cartes avaient été distribuées, c'est-à-dire une raison que ne peut affecter la façon dont on fournit les cartes.
Pourquoi la probabilité de ♠DV ♥542 ♦76542 ♣A32 deviendrait elle inférieure de moitié à la probabilité de ♠V ♥6542 ♦76542 ♣A32 à partir du moment où on nous a demandé de fournir un pique ?
Comment se fait – il que la fourniture d'une carte, parmi plusieurs cartes équivalentes que les règles du bridge nous imposent de fournir une à une, puisse diminuer la probabilité d'une main en fonction de ses possibilités de fourniture?
Parce qu'on a fourni le valet mais qu'on pouvait aussi fournir la dame ?
C'est à peu prés comme si, pratiquant l'archéologie et ayant exhumé un bas relief portant une marque de fabrique dont seule la lettre A est visible, vous supputiez qu'il est 2 fois plus probable qu'il provienne d'ALEXANDRIE que de CARNAC (bien que vous sachiez que Carnac a produit plus de bas reliefs qu'Alexandrie) parce que le nom d'Alexandrie ne comporte qu'un A et celui de Carnac en comporte 2.
Que le A découvert soit forcément le premier et le seul s'il provient d'Alexandrie alors qu'il peut être le premier ou le second s'il provient de Carnac ne diminue en rien la probabilité de Carnac.
Il en irait de même si le A d'Alexandrie était majuscule et que les A de Carnac étaient majuscule pour l'un et minuscule pour l'autre. Les A majuscules que l'on peut découvrir sont en proportion des bas reliefs de Carnac et d'Alexandrie qui n'ont pas encore été exhumés. Et si ceux de Carnac sont les plus nombreux, il est plus probable que le A majuscule découvert provienne de Carnac que d'Alexandrie.
Il en va de même pour les honneurs à pique de nos mains. Leur équivalence devant les lois du bridge et notamment devant la fourniture, les rend identiques en dépit des apparences.

Que l'honneur découvert soit forcément le seul possible s'il provient de ♠V ♥6542 ♦76542 ♣A32 et l'un des deux honneurs possibles s'il provient de ♠DV ♥542 ♦76542 ♣A32 ne diminue en rien la probabilité de ♠DV ♥542 ♦76542 ♣A32.

D'ailleurs, quand vous spéculiez sur la probabilité de ♠DV ♥542 ♦76542 ♣A32 avant de jouer pique, vous saviez déjà que cette main avait deux possibilités de fournir à pique et ♠V ♥6542 ♦76542 ♣A32 une seule. Pourquoi ne pas avoir divisé par deux la probabilité de la première main à ce moment là, quand les deux fournitures étaient encore possibles. Que l'adversaire joue le V avec VD constitue t il un fait nouveau ? Et quand il a joué le V est il opportun de considérer la possibilité qu'il avait de fournir la D alors que cette occurrence fait partie du passé, n'a plus cours et peut être qualifiée d'impossible au stade où se pose le problème ? L'Univers des possibles qui sert de cadre aux probabilités est toujours celui du stade actuel, celui où se pose le problème. Les univers possibles aux stades antérieurs cessent d'être connectés à la réalité dés lors qu'ils ne sont plus possibles, nous devons les mettre au rebut de notre imagination et ils ne peuvent en aucune façon jouer un rôle dans nos problèmes de probabilités. Parler de la probabilité de fournir la D au moment où se pose le problème est totalement dépourvu de sens, puisque c'est le V qui a été fourni.

Abandonnons maintenant l'univers des mains possibles où l'on trouve 54% De DV et 46% de V secs pour la population humaine où les règles mathématiques vous sont plus familières. Si dans cette population 54% des hommes sont mariés et que vous rencontrez un homme, il peut être célibataire ou marié à une femme. Allez vous en déduire que la probabilité pour qu'il soit marié est moins de 54% sous prétexte que vous auriez pu rencontrer une femme à sa place ?

Voyons autre chose. Quand nous en sommes là :

NORD	♣2	♣3	♣A	♦2	♠V								
SUD	♣R	♣D	♣4	♦3	♠2	♠3							

La probabilité pour que le ♦4 soit en Nord est bien 8 / 15 ?

Vous pouvez si vous le voulez tirer 100.000 mains où les cartes sont comme dans ce diagramme et vous verrez que le ♦4 est bien en Nord 8 fois sur 15.

Puis, une fois qu'il y sera, la probabilité pour que le ♦5 soit dans la même main sera bien 7/14 ?

Et ainsi de suite pour le ♦6 , le ♦7, le ♥2 , le ♥4 , le ♥5 , jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une place vacante en Nord et que la probabilité qu'elle soit occupée par le ♥6 soit 1 / 8 .

Donc la probabilité de ♠V ♥6542 ♦76542 ♣A32 en Nord est bien 8x7x6x5x4x3x2x1 / 15x14x13x12x11x10x9x8 ?

Et ce nombre est bien égal à 1 / 6435

Et 6435 c'est bien le nombre total des mains possibles en Nord ?

Alors comment se fait – il que le moindre choix donne 1 / 4719 pour probabilité de ♠V ♥6542 ♦76542 ♣A32 en Nord ?

Le moindre choix déboucherait – il sur des incohérences quand on quitterait le niveau des mains pour évaluer les probabilités au niveau élémentaire qui est celui des cartes ? Une main ne serait ce pas prosaïquement un ensemble de cartes ? Et à ce titre un ensemble de mains n'hériterait – il pas ses probabilités de celles qui sont en vigueur au niveau des cartes ? La probabilité d'une main ne serait donc plus la probabilité qu'elle soit composée de toutes ses cartes ?

Voyons encore autre chose. Intéressons nous à la probabilité du ♦7 en Nord.

Quand nous en sommes là :

NORD	♣2	♣3	♣A	♦2	♠V								
SUD	♣R	♣D	♣4	♦3	♠2	♠3							

Il reste 15 cartes non localisées un seul pique la ♠D et 14 non – pique partagés 7–7 ou 8–6 (8 en Nord).

● La probabilité que les non – pique soient 7–7 est égale à la probabilité de la ♠D en Nord soit P d'après le moindre choix.
Quand les non – pique sont 7–7 la probabilité d'un non–pique en Nord, par exemple le ♦7 est 7/14 = 1/2.
● La probabilité que les non – pique soient 8–6 est égale à la probabilité de la ♠D en Sud soit 1 – P d'après le moindre choix.
Quand les non – pique sont 8–6 la probabilité d'un non–pique en Nord, par exemple le ♦7 est 8/14 = 4/7.
● La probabilité pour qu'un non – pique donné, par exemple le ♦7, soit en Nord est donc P(7/14) + (1–P)(8/14) = (8 – P)/14
● Si cette probabilité est bien 8/15 conformément au procédé des places vacantes de (8–P)/14 = 8/15 c'est que P = 8/15.
P = 53% et non 36% comme le prétend le moindre choix.
Donc moindre choix et loi des places vacantes ou moindre choix et loi des partages sont incompatibles.

Enfin, si vous postulez que la probabilité d'une main est fonction inverse de ses possibilités de fournitures pourquoi ne pas avoir appliqué ce principe aux stades précédents quand on fournissait du trèfle ou du carreau ? Avez-vous conscience que l'adoption de ce principe débouche sur la négation de la plupart des probabilités classiques que vous utilisez dans d'autres situations ?

En conclusion :

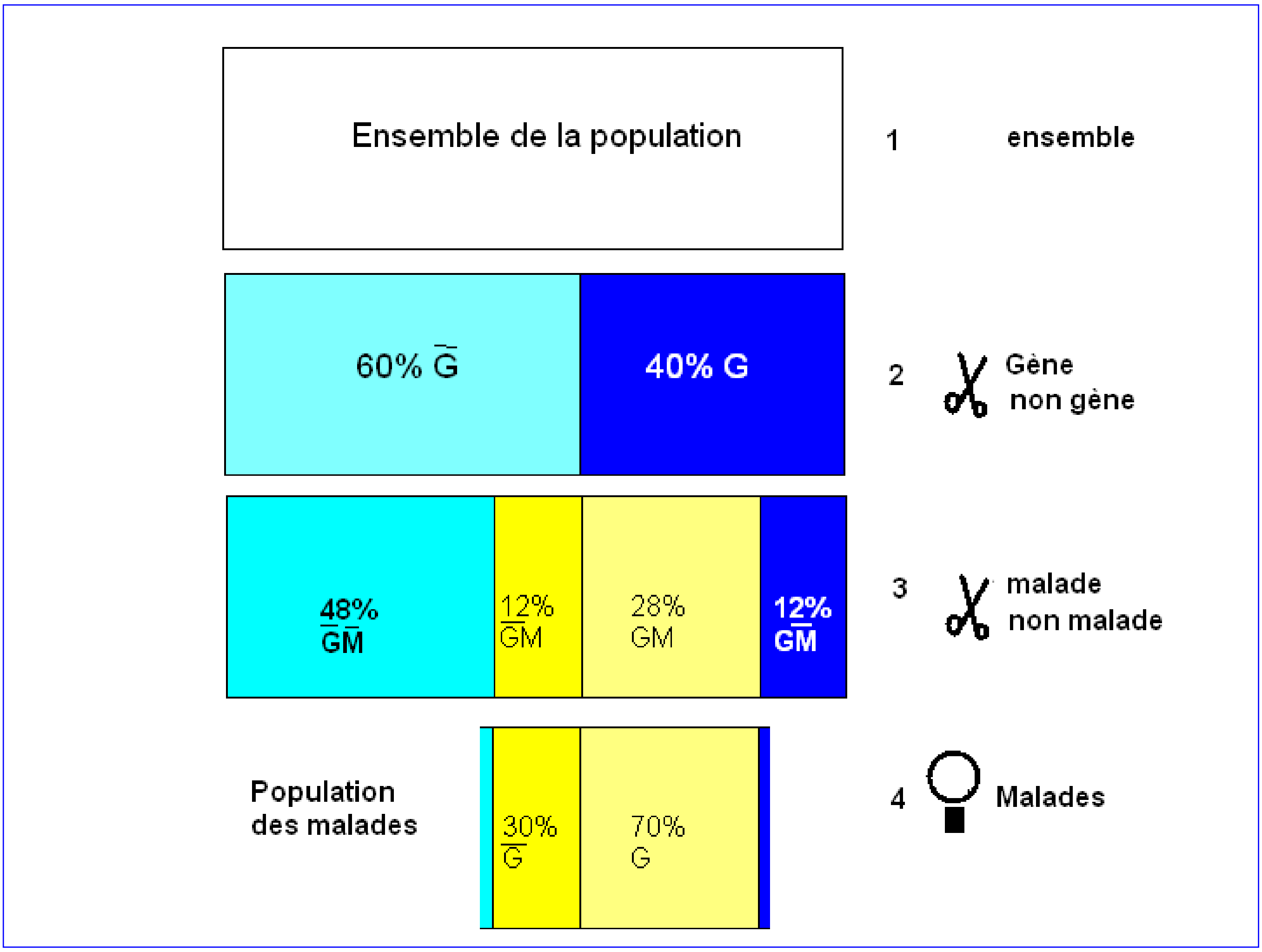
L'adoption des règles de Borel débouche sur une rupture du principe d'équiprobabilité de mains. Inférence d'autant plus absurde que l'équiprobabilité (à tous les stades de la partie) découle de la distribution aléatoire ce qui la rend indemne aux aléas de la fourniture. En outre renoncer au principe d'équiprobabilité, c'est remettre en cause toutes les probabilités classiques qui ne reposent pas sur le moindre choix, ce qui relève de la contradiction pure et simple.

Loi de Bayes ou loi de Borel ?

Observons le fonctionnement de la loi de Bayes à travers un exemple emprunté à un livre de Mathématiques :

● La fréquence d'un gêne G dans la population est 40% .
La probabilité d'attraper une maladie M quand on est porteur du gêne est 70% , dans le cas contraire cette probabilité est de 20%.
Quelle est la probabilité pour qu'un malade de M soit porteur du gêne G ?
Probabilité d'être porteur du gêne : P(G) = 0.4
Probabilité de ne pas être porteur du gêne P(non G) = 0.6
Probabilité d'être malade P(M) = 0,4 x 0,7 + 0,6 x 0,2 = 0,28 + 0,12 = 0,4
Probabilité d'être porteur du gêne quand on est malade : P(G \ M) = 0,28 / 0,4 = **70%.**

Cette situation peut être résumée à travers le schéma suivant



1 L’ensemble des possibles est l’ensemble de la population.
2 On a d’abord scindé cette population en 2 classes (les porteurs du gène et les autres).
3 Puis chacune de ces classes en deux sous classes (celle des malades et celle des individus sains)
4 Puis on s’est situé dans la classe des malades et on a évalué en son sein la proportion de la sous classe des porteurs du gêne.

Cette proportion est la probabilité de porter le gêne quand on est malade.

Toutes les applications de la loi de Bayes fonctionnent selon le même modèle.
Une population munie d’un espace de probabilités qu’on scinde en N classes (ici 4) en croisant P caractères (ici 2).
L’une de ces classes est porteuse du caractère trouvé chez l’individu tiré au sort (ici le caractère est malade)
Et au sein de cette classe une sous classe correspond au caractère recherché chez l’individu (ici porteur du gène).
Il suffit de quantifier la proportion respective des sous classes dans une classe pour résoudre le problème.
En procédant ainsi, toutes les probabilités sont calculées à partir d’un ensemble initial dans lequel la règle est la suivante: pour calculer la probabilité d’un caractère dans la population, il suffit de calculer l’effectif du sous ensemble doté de ce caractère et d’en faire le ratio à l’effectif global de l’ensemble de référence. Pour que les produits et les quotients de probabilités utilisées dans la loi de Bayes aient un sens, il faut que nous nous situions dans le même espace de probabilités et la procédure que nous avons employée dans l’exemple précédent, (partitionnement d’un espace de probabilités en classes) est garante de la cohérence du dispositif.

Toutes les règles définissant un espace de probabilités sont respectées et il est important de remarquer qu'un individu de la population initiale appartient forcément à une seule classe ou une seule sous classe quand on observe la partition de l'ensemble selon un caractère ou selon la conjonction de plusieurs caractères. En effet, si, par exemple, au sein de la population des malades un ou plusieurs individus appartenaient à la fois à la sous–classe des porteurs de gènes et à celle de ceux qui ne portent pas le gène, cela signifierait que l'intersection d'un ensemble avec son complémentaire n'est pas vide et il faudrait revoir notre copie.
Il est également important de remarquer qu'on n'a rien fait d'autre que prendre l'Univers initial et le fractionner selon des règles numériques. Tout individu de l'univers initial se retrouve dans une classe, le fractionnement en classes ou sous classes n'a pas augmenté ni diminué le nombre des individus, la nature de l'univers est restée la même au cours du fractionnement, aucune des règles de probabilités applicables à un individu dans l'univers primordial n'est modifiée, démentie ou infirmée, par l'addition ou la suppression de classes supplémentaires.

Essayons maintenant d'appliquer ces principes à une population de donnes en considérant que tel type de fourniture constitue un caractère que l'on peut attribuer aux donnes.

Dans tous les cas

1) nous partons d'un ensemble de référence qui est l'ensemble des distributions ou mains possibles dans les deux flanc (ou ce qui est équivalent dans l'un d'eux) au moment où se pose le problème.
Par exemple ♠ VD ♥ 6542 ♦ 6542 ♣ A32, ♠ VD ♥ 7542 ♦ 6542 ♣ A32 et ♠ V ♥ 6542 ♦ 76542 ♣ A32 sont trois des mains possibles en Nord.
L'effectif global de cet ensemble est **1716** mains possibles.

2) nous procédons à une partition de cet ensemble en 2 classes selon les piques possédés en Nord
792 mains avec V sec et **924** mains avec DV secs.

3) c'est à partir de là que commencent les difficultés.
Pour l'instant nous avons doté les mains possibles du caractère « piques » dont les modalités sont « VD » et « V sec ». Si nous voulons doter ces mains du caractère «pique fourni » dont les modalités sont « V fourni » ou « D fournie ». il faut que **chacune** des mains possibles soit dotée du caractère en une modalité unique. De la même façon que tout individu de la population humaine doit être soit malade, soit sain, soit porteur, soit non porteur et ne peut en aucun cas être doté d'aucune modalité d'un caractère, ou de 2 modalités d'un même caractère.
Donc dans notre population des mains possibles, nous n'aurons aucune difficulté à doter par exemple ♠V ♥6542 ♦76542 ♣A32 de la modalité « V fourni » mais avec par exemple ♠VD ♥7542 ♦6542 ♣A32 , il faudra faire un choix et attribuer à cette main soit le caractère « V fourni », soit le caractère « D fournie ».
Seulement voilà un problème se pose : si nous avons attribué à ♠VD ♥7542 ♦6542 ♣A32 la modalité « D fournie » quand nous verrons apparaître le V comme c'est le cas dans notre donne, il sera impossible que ce V provienne de ♠VD ♥7542 ♦6542 ♣A32.
Or, il est évident que dans notre donne, la probabilité de cet évènement ne peut être nulle.
En outre, si le hasard vous fait tirer une main avec le caractère « D fournie » vous aurez la certitude qu'il s'agit d'une main avec DV alors qu'en matière de bridge ce n'est jamais le cas.
Il y a donc quelque chose qui cloche.
On ne peut partitionner l'ensemble des mains possibles selon le caractère « pique fourni » sans se heurter à une contradiction de ce type.

Essayons de pousser plus loin l'analyse des différences subtiles entre les deux problèmes pour essayer de comprendre où réside l'orthodoxie en matière de probabilités.
En fait notre étude débouche sur la conclusion qu'il existe deux types de caractères prêtés à la population d'un espace de probabilités et que ces types de caractères sont de nature très différente.
Pour les distinguer nous les appellerons « **caractère passif** » et « **caractère actif** ».

● Un **caractère passif** est tel que tous les individus de la population sont marqués par une et une seule de ses modalités de manière exhaustive, unique et irréversible.
Par exemple : « porteurs ou non du gène », « malade ou sain », « teneur des piques» sont des caractères passifs en ce sens que tout individu (tout être humain, toute main du flanc) est marqué par une modalité et une seule de ces caractères.

● Un **caractère actif** est tel que certains des individus d'une population peuvent être affectés de telle ou telle modalité de ce caractère au gré des tirages ou des expériences, en général lors de l'action d'un opérateur, ce qui justifie le qualificatif d' « actif ».
Par exemple le caractère « carte fournie par une main » est un caractère actif dés lors que ce caractère peut prendre plusieurs valeurs pour une même main. L'action qui dote la main d'une modalité parmi toutes celles qui sont possibles est la fourniture.

Quelles sont les conséquences de la présence de l'un ou de l'autre de ces types de caractères dans un problème de probabilités ?

Supposons une population d'effectif N à laquelle on prête plusieurs caractères

● **<u>Si tous les caractères prêtés à la population sont passifs</u>**, l'effectif de l'univers est celui de la population, l'univers est formé de N individus, tous marqués par une modalité de chaque caractère.
Exemple 1 : l'univers est constitué d'une population de 10.000 personnes chacune d'elles étant soit porteuse du gène soit non porteuse, et soit malade soit saine.
Exemple 2 : l'univers est constitué d'une population de 1716 mains, 798 avec V sec et 924 avec DV secs.

● **<u>Si certains caractères prêtés à la population sont actifs</u>**, on est dans une situation très différente puisque certains individus parmi les N sont susceptibles d'être dotés de plusieurs modalités d'un caractère actif. Dans l'univers des possibles, chaque individu de la population initiale est dupliqué en autant de modalités que peut prendre son caractère actif. Ce qui fait que l'effectif de l'univers des possibles est plus nombreux que celui de la population initiale et que les lois de probabilités valables dans la population initiale ne sont en général plus valables dans l'univers des possibles ainsi constitué.
Exemple : si on dote une population formée de 1716 mains, 798 avec V de pique sec et 924 avec DV de pique secs, du caractère « pique fourni », l'univers des possibles contient

● Quand on fournit le V : 798 mains avec V sec et 924 mains avec DV secs

● Quand on fournit la D : 924 mains avec DV secs

Tous ces possibles sont équiprobables, ce qui signifie que quand le V est fourni toute main avec V sec est équiprobable à toute main avec DV. Et quand la D est fournie, toute main avec DV est équiprobable à une autre.
Dans cet univers une main comportant DV avec laquelle on fournit le V est distincte d'une main comportant DV avec laquelle on fournit la D (comme c'est le cas dans la réalité d'ailleurs, puisque ces deux mains ne sont pas possibles simultanément dans la même donne) si bien que le caractère « pique fourni » devient passif. Ce qui fait que quand le V est fourni la probabilité qu'il provienne de V ou de DV est égale à la proportion de V ou de DV dans la population des possibles exactement comme c'est le cas quand on tire un malade et qu'on évalue la probabilité pour qu'il soit porteur du gène à la proportion de porteurs du gène dans la population des possibles qui dans ce cas coïncide avec la population des malades.

Ce n'est visiblement pas dans cet univers, qui est celui de toutes les mains possibles en fonction de la fourniture, que se situe Borel.

Pourquoi est il impropre d'appliquer la loi de Bayes à un ensemble de mains dotés du caractère « fourniture » selon le procédé utilisé par Borel ?
Parce que la fourniture est un caractère actif et que la prise en considération d'un caractère actif dans une population interdit qu'on prenne cette population comme univers des possibles. Quand Borel applique la probabilité de ½ à l'acte de fournir le V avec VD il amalgame un caractère actif à un caractère passif, c'est-à-dire qu'il procède comme si, une fois que le V était fourni, on pouvait en déduire qu'il provenait d'un effectif formé de la totalité des mains avec V sec et de la moitié des mains avec VD (exactement comme un malade provient d'un effectif formé de 70% des porteurs de gène et de 20% des non porteurs). En réalité, il n'en est rien : ce V peut provenir de l'intégralité de l'effectif des 1716 mains et <u>la probabilité de ½ ne fait pas référence à un clivage de la population mais à un caractère actif qui prendra cette modalité (V fourni) une fois sur deux si on renouvelle l'expérience de nombreuses fois</u>.
En fait, l'application de la loi de Bayes n'est judicieuse que si l'univers est une population exclusivement marquée par des caractères passifs.
Ou en d'autre termes si les caractères provoquent des clivages quantifiables au sein de la population, chaque individu pouvant être affecté à une classe ou une sous classe de manière fixe. Et c'est la quantification des clivages qui détermine les probabilités.

:
Pour tenter de préciser ces concepts délicats, examinez le problème suivant à la lumière de ce que nous venons de dire :

Un animateur me présente 3 portes fermées A , B , C. Derrière l'une d'elles est caché un trésor qui m'appartiendra si je trouve la bonne porte.
Il me demande de choisir une porte. Je choisis la porte A. L'animateur qui sait où se trouve le trésor ouvre la porte B montrant que le trésor n'est pas derrière elle. Puis il me propose soit de garder la porte A soit de changer pour la porte C.
En termes de probabilités, quel est mon intérêt ?

Sommes nous dans une situation où il est permis d'utiliser la loi de Bayes en disant :
J'avais 1 chance sur 3 que A soit la bonne porte et dans ce cas il y avait 1 chance sur 2 pour que l'animateur ouvre B
(le trésor étant derrière A, il pouvait ouvrir B ou C)
J'avais 2 chances sur 3 d'avoir choisi la mauvaise porte et dans ce cas l'animateur devait obligatoirement ouvrir B (probabilité 1).
(le trésor étant derrière C, il devait obligatoirement ouvrir B)
Donc P(A bonne et B ouverte) = 1/3 x 1/2 = **1** / 6
et P(A mauvaise et B ouverte) = 2/3 x 1 .= **4** / 6
Donc P (A bonne quand B ouverte) = **1 / (4 +1)** = **1 / 5**
et P(A mauvaise quand B ouverte) = **4 / 5**

Si quelque chose qui ressemble assez à de la logique vous dit que la probabilité d'avoir choisi la mauvaise porte qui était initialement de **2/3** n'a pas pu augmenter et passer à **4/5** sous prétexte que la clampin de service a ouvert une mauvaise porte comme il a toujours l'occasion de le faire, qu'est ce qui cloche dans le raisonnement précédent ?
Ce qui cloche c'est que « porte ouverte » est un caractère actif et que de ce fait il faut redéfinir l'univers des possibles.

Dans ce qui suit les 3 lettres (ex AAB) indiquent dans l'ordre 1) l'emplacement du trésor 2) la porte choisie 3) la porte ouverte
Les possibles (avec leur probabilité respective) sont

AAB (1/18)	BAC (1/9)	CAB (1/9)
AAC (1/18)	BBA (1/18)	CBA (1/9)
ABC (1/9)	BBC (1/18)	CCA (1/18)
ACB (1/9)	BCA (1/9)	CCB (1/18)

Surlignés en jaune les cas compatibles avec notre expérience (A choisie / B ouverte)
AAB est deux fois moins probable que CAB.
Ce qui fait que quand A est choisie et B ouverte la probabilité du trésor en C est **2/3** (et non pas 4/5)

Si le caractère « porte ouverte » était passif, il serait attaché à la porte B, ce qui fait que la porte B serait ouverte aussi bien dans le cas sur 3 où A est la bonne porte que dans les 2 cas sur 3 où A est la mauvaise porte, ce qui rendrait judicieux le premier calcul.
En réalité le caractère « porte ouverte » est actif puisqu'il dépend de l'emplacement du trésor et de la porte choisie. Donc le cas « A mauvaise porte » se décompose en deux cas : BAC et CAB dont l'un (BAC) est incompatible avec un évènement avéré (ouverture de B). Ce qui fait qu'il est incorrect de dire que dans les 2/3 des cas où A est la mauvaise porte, la porte B est ouverte, comme il est incorrect de dire que le V sera fourni avec la moitié des mains possibles de cette donne comportant VD si le caractère fournir le V ou la D n'est pas lié à la nature individuelle de chaque main, chaque modalité marquant la moitié de l'effectif.
Imaginez par exemple que la règle soit : fournir le V avec une main comportant le ♦10 et fournir la D si le ♦10 n'est pas dans la main. Dans ce cas, il serait judicieux de dire que le V sera fourni avec la moitié des mains comportant VD, puisque l'effectif des mains possibles avec lesquelles on fournirait le V serait la moitié de l'effectif des mains possibles avec VD. Mais dans une donne de bridge, ce n'est pas le cas : on peut fournir le V ou la D avec <u>toutes</u> les mains comportant VD ce qui fait de la fourniture un caractère actif et interdit de prendre l'ensemble des main possibles comme ensemble des possibles.

Notons qu'il est problématique d'employer la loi de Bayes avec un caractère actif.

Ceci – dit nous ne nous en tiendrons pas au résultat précédent, ce problème des portes appelle d'autres remarques.
« Ouverte » est bien un caractère actif pour une porte dans l'expérience qui nous intéresse, mais « bonne » ou «mauvaise » est un caractère passif, puisque dés l'origine du problème chaque porte est « bonne » ou « mauvaise » selon que le trésor se trouve derrière elle ou pas.
Vous conviendrez je pense, sans difficulté, qu'ouvrir la porte B quand on sait que le trésor ne se trouve pas derrière elle équivaut tout à fait à nous dire que la porte B est « mauvaise ».
Et que donc notre problème peut revêtir la formulation suivante « Quelle est la probabilité pour que la porte A soit bonne, sachant que B est mauvaise ? » . « Probabilité de .... sachant que .... » : nous sommes bien dans le domaine des probabilités conditionnelles et plus dans celui des probabilités des causes qui justifie l'emploi de la loi de Bayes.
Nous devons donc employer la formule suivante :
Probabilité de (A bonne sachant B mauvaise) = rapport de la probabilité de (A bonne ET B mauvaise) à la probabilité de (B mauvaise)
La probabilité de (A bonne ET B mauvaise) est 1/6 ou la moitié de la probabilité de C mauvaise ou la moitié de la probabilité de B mauvaise.
Et donc la Probabilité de (A bonne sachant B mauvaise)= **1 / 2**.
Si nous nous situons dans un univers formé de 3 portes dotées du caractère passif « bonne » ou « mauvaise » la probabilité que nous cherchons et **1/2**.. Et vous conviendrez sans difficultés que c'est bien dans cet univers que nous nous trouvons.

Nous avons donc un problème (encore un) puisque deux raisonnement qui semblent tous les deux corrects débouchent sur des conclusions contradictoires. La réponse tient aux univers dans lesquels on se situe.

Quand on trouvait une probabilité de **2/3** , l'univers était formé de **12** possibilités (de AAB à CCB) . C'est l'univers que l'on obtient quand on peut placer le trésor derrière une porte différente, choisir une porte différente et ouvrir une porte différente à chaque expérience d'une série infinie.
Donc en fait, dans ce contexte, « ouverte » n'est pas le seul caractère actif, tous les caractères le sont puisque pour une porte donnée, ils peuvent changer d'une expérience à l'autre, au contraire de ce qui se produit dans une population humaine dont la stabilité fait partie des hypothèses de base: tous les individus gardent leurs caractères (gène ou santé) d'un tirage à l'autre.
Si l'on poursuit la pratique du jeu des portes à l'infini, tous les choix étant aléatoires, chaque possible va se produire avec une fréquence donnée et l'ensemble des 3 actes qui détermine une partie (choix de l'emplacement du trésor, choix d'une porte sur 3, choix de la porte ouverte) va aussi selon sa nature se produire avec une fréquence égale à 1/18 ou 1/9 selon que la porte choisie est la bonne porte ou une mauvaise. Et sur la totalité des parties, les fréquences nous indiquent qu'on aura intérêt 2 fois sur 3 à changer de porte.
Mais l'univers dans lequel on se situe ici n'est pas **un univers de portes** bonnes ou mauvaises : c'est **un univers d'épreuves**.
Chaque épreuve est semblable à la nôtre sauf qu'on change de façon aléatoire l'emplacement du trésor, la porte choisie et la porte ouverte.
Et dans cet univers, c'est sur les épreuves où les faits observables se sont déroulés comme dans la nôtre qu'on évalue la fréquence de l'emplacement du trésor derrière la porte A ou derrière la porte C. Dans cet univers la probabilité d'un fait est une fréquence d'épreuves confirmant le fait escompté.

Seulement voilà : personne ne vous a dit qu'il vous fallait trouver la stratégie la plus rentable si vous jouiez au jeu des portes sans discontinuer pendant les 20 prochaines années. Il est bien évident que ce jeu n'est pas le vôtre et que pour construire et justifier les fréquences données, il a fallu faire appel à de nombreuses situations qui ne sont pas la vôtre et qui ne le seront jamais. Quand l'univers est formé de 12 possibilités, c'est qu'on peut changer l'emplacement du trésor, c'est qu'on peut choisir non seulement la porte A mais aussi la porte B ou la porte C, et que de la même façon on peut ouvrir n'importe laquelle des 3 portes. Avons-nous le droit d'appeler cet ensemble « univers des possibles » quand dans la situation où nous nous trouvons les qualificatifs de « choisie » et « ouverte » qu'on applique aux portes sont avérés et qu'ils interdisent toute autre possibilité aux portes concernées? Non bien sûr, dans notre univers des possibles, la seule porte choisie est la porte A et la seule porte ouverte est la porte B.
Nous, on nous a placé dans un univers sommaire composé de **3** portes « bonnes » ou « mauvaise », on nous a indiqué que l'une d'elles était « mauvaise » et on nous a demandé quelle était la probabilité pour que la nôtre soit « la bonne ».
Et dans cet univers, où vous ne jouez qu'une seule fois au jeu des portes....

- Cela peut paraître paradoxal, mais si vous choisissiez la porte A après qu'on vous ait dit que la B était mauvaise la probabilité serait la même, le premier choix est un leurre, un artifice inutile, propre à vous égarer, puisque le véritable enjeu du problème est de choisir entre A et C après vous avoir dit que B est mauvaise.
- il n'y a aucune raison pour que A bonne et C mauvaise soit plus ou moins probable que A mauvaise et C bonne
- le trésor est équiprobable derrière A ou derrière C

... et la probabilité cherchée est **1 / 2**.

En matière de bridge, c'est la même chose qui se produit, vous jouez une donne unique et vous ne la jouez qu'une fois, on ne vous demande pas avec quelle fréquence le valet proviendra de VD ou de V sec quand vous serez confronté à une machine programmée pour fournir de façon aléatoire et prolifique avec toutes les distributions possibles.

On vous demande de calculer la probabilité pour que le V provienne de DV dans CETTE main. La seule fourniture possible dans notre univers est le V et nous n'avons pas à considérer qu'une autre puisse avoir lieu. Si l'adversaire avait fourni une boule jaune et que vous sachiez que cette boule peut provenir soit de l'une des 54 distributions avec 2 boules jaunes possibles, soit de l'une des 46 distributions avec une seule boule jaune possibles, toutes les distributions étant équiprobables, quelle aurait été votre estimation de la probabilité ?
Notre main appartient à une série de mains dont les membres peuvent être regroupés en autant de types que nous pouvons faire d'hypothèses sur sa configuration et chaque type est précisément dénombrable. Calculer la probabilité d'une hypothèse concernant la main ce n'est pas imaginer qu'on joue plusieurs fois toutes le mains possibles en adoptant une stratégie donnée, c'est simplement dénombrer et comparer les familles de mains possibles vérifiant une hypothèse donnée. Si la famille des mains possibles vérifiant l'hypothèse H1 est plus nombreuse que la famille vérifiant l'hypothèse H2, vous estimerez l'hypothèse H1 plus probable que l'hypothèse H2.
Quand vous jouez à la loterie, ce qui détermine la probabilité ce n'est pas le comportement de celui qui vend les billets, c'est la nature équitable exhaustive et aléatoire du processus qui imprime les billets. Au bridge, remplacez « machine qui imprime les billets » par « distribution aléatoire » et vous pouvez faire un parallèle entre les deux univers.

Lorsque qu'on veut développer toutes les possibilités de caractères **actifs** dans une population, on constitue, en général, un univers formé d'une série d'épreuves sur la population au cours desquelles toutes les modalités de caractères sont combinées de toutes les façons possibles. (trésor déplacé, porte choisie, porte ouverte dans une population de portes ou carte fournie dans une population de mains)
Dans cet univers on peut élaborer des stratégies et évaluer leur fréquence de réussite.
Mais cet univers n'a en général rien à voir avec l'univers des possibles dans une épreuve donnée unique et les fréquences mesurées dans la série n'ont non plus rien à voir avec la probabilité dans une épreuve.

Par contre, si tous les caractères de la population sont **passifs** et ses caractéristiques numériques constantes, la probabilité dans une épreuve et la fréquence dans une série d'épreuves peuvent être amalgamées sans problème. (tirages aléatoires dans une population d'humains ou de donnes possédant des caractéristiques données)

Tout le problème est de vous faire renoncer aux perversions d'une vision en fréquence qui vous dépeint, au grés des situations, soit en train de manipuler des donnes qui n'ont plus rien à voir avec la vôtre depuis belle lurette, soit en train de vous colleter à des adversaires que vous dotez de la possibilité d'influencer les probabilités par leur attitude alors qu'au mieux, quand leur comportement n'est pas obligatoire, ils ne font que choisir parmi plusieurs cartes équivalentes celle qu'ils vont vous montrer.
L'une et l'autre des ces visions sont aux probabilités en matière de bridge ce que les moulins à vent sont à Don Quichotte.

Les perversions de la vision en fréquence des probabilités

À elle seule, l'objection qu'on ne connaît pas le mode de fourniture de l'adversaire suffit à discréditer les tentatives d'utilisation de la loi de Bayes, mais il reste à expliquer aux bridgeurs, pourquoi, même si l'on connaissait ce mode de fourniture et qu'on jugeait l'utilisation de la loi pertinente, il serait incorrect d'assimiler la probabilité dans une donne à la rentabilité d'une stratégie dans une expérience reproduisant des fréquences antérieures à la situation de la donne. Or c'est ce que vous faites quand vous voyez défiler 10.000 donnes et que, connaissant le mode de fourniture de l'adversaire vous jugez que votre stratégie sera couronnée de succès dans 65% des cas quand le valet sera fourni et dans 65% des cas quand la dame sera fournie.

D'abord

Démontrons que les probabilités initiales ne veulent plus rien dire dés que des cartes sont jouées.

Appelons **STADE 0** le stade où l'on a pris connaissance du mort mais où le jeu de la carte n'a pas commencé et **STADE n** la fin de la nième levée.
Au stade 0 la probabilité de V sec en Nord est **6,21%** et celle de DV secs est **6,78%**.
Supposons qu'au lieu de jouer atout, le déclarant commence un jeu de double coupe et qu'on arrive à la 11^{e} levée sans que l'adversaire ait défaussé ou surcoupé. Il reste 2 cartes à chaque joueur et toutes sont des piques.
Quelle est la probabilité de V sec ? **0%** évidemment puisqu'il reste 2 piques à chaque joueur.
Et la probabilité de DV secs en Nord ? Il y a 6 doubletons possibles : 23, 2V , 2D, 3V, 3D, DV et un seul correspond à notre hypothèse donc la probabilité cherchée est 1 / 6 = **16,66%**.
Donc entre le stade 0 et le stade 11 l'une des probabilités a évolué de 6,21% à 0% et l'autre de 6,78% à 16,6%.
Cette évolution n'a pas été brutale. On peut calculer que dans notre donne, après que les adversaires aient encaissé leurs 3 trèfles au STADE 3 , ces probabilités étaient respectivement **6 ,19%** et **6,96%** puis, au STADE 4, après qu'ils nous aient donné la main à carreau : **6,17%** et **7,05%.** Les probabilités de partage évoluent conformément à la loi de compression, ce qui signifie que plus on les juge tard dans le coup, plus la probabilité des partages équitables augmente au détriment des partages moins équitables. C'est comme si on comprimait lentement les piques pour en faire un tas homogène.
Posons maintenant une question innocente : si au STADE 11, quand il reste 2 piques à chaque joueur vous jouez pique et que Nord fournisse la dame, en supposant qu'il fournisse la dame une fois sur deux avec DV et jamais avec D2 ou D3 (c'est ainsi qu'il procède), est ce que vous évaluerez la probabilité pour qu'il ait DV à 35% comme vous le faisiez au STADE 5 ou à 100% comme la restriction des possibles vous l'impose ?
Si vous avez répondu 100% c'est que vous avez conscience que les conditions dans lesquelles se déroule la donne ont une influence sur les probabilités, puisque vous avez abandonné votre vision initiale reposant sur le déroulement de nombreuses donnes qui n'ont rien à voir avec la vôtre pour l'adapter à la donne que vous êtes en train de jouer.

Démontrons maintenant le fait suivant :

Au STADE 4, (juste avant de jouer pique) la stratégie reposant sur une attitude conforme aux fréquences initiales n'est pas forcément la plus opportune et la plus rentable.

Quand vous tirez, comme vous le faisiez tout à l'heure 10.000 donnes obtenues par une distribution aléatoire des 26 cartes du flanc à vos adversaires, les 6 trèfles et les 2 carreaux que nous connaissons chez eux au stade où se pose le problème peuvent être partagés de toutes les façons possibles. Sur 10.000 donnes, le tableau ci-dessous indique le nombre de donnes où les 8 cartes sont partagées d'une certaine façon (Sud – Nord) , puis, la probabilité de DV ou V secs en Nord.

Partages 6♣ + 2♦	Nombre de donnes	DV secs	V sec	Stratégie Bayes
0-8	10	4,2%	11,6%	Faire l'impasse
1-7	145	5,4%	10,8%	
2-6	855	6,29	9,4%	
3-5	2355	6,86%	7,8%	
4-4	**3270**	**7,05%**	**6,17%**	
5-3	2355	6,86%	4,5%	
6-2	855	6,29%	3,14%	Tirer en tête
7-1	145	5,4%	2%	
8-0	10	4,2%	1%	

Donc, la probabilité moyenne de **DV** secs est **6,8%,** la probabilité moyenne de **V** sec (ou **D** sèche) est **6,19%** mais dans chaque groupe de donnes, la proportion varie, au point que dans environ **10%** de donnes, la loi de Bayes,elle-même, recommande de tirer en tête.
Donc, même si l'on se place du point de vue de la loi de Bayes, **la stratégie qui consiste à suivre les recommandations de la loi de probabilité groupe par groupe est forcément plus rentable que la stratégie moyenne basée sur les fréquence initiales**.
Ce serait aussi le cas, d'ailleurs d'une stratégie visant à localiser un honneur et basée sur la loi des places vacantes.
Or, il est facile de voir que si dans notre donne les 8 cartes sur le partage duquel on fonde notre stratégie sont 4-4, il n'y a aucune raison de compter à notre profit ou à notre débit les partages 8-0 , 7-1 , 6-2 ou 5-3 puisque n'ayant pas cours dans notre donne, ils ne travaillent ni pour nous, ni contre nous et il ne peuvent pas contribuer à améliorer ou a dégrader les probabilités calculées quand les 8 cartes sont partagées 4-4.
En effet, si pour évaluer une probabilité qui vous est favorable, vous comptez à votre profit les 3365 cas où Nord a au moins 5 des 8 cartes en question alors que nous savons avec certitude qu'il n'en a que 4, c'est que vous faites preuve d'un optimisme injustifié.
Dans notre donne, décliner la stratégie la plus rentable équivaut à se comporter comme si l'on tirait de nombreuses donnes avec ♣A32 ♦2 en Nord et ♣RD4 ♦3 en Sud. Dés lors, aucun tirage n'est incompatible avec le STADE 4 de notre donne et la logique et les probabilités y trouvent leur compte.
Mais il se trouve que dans cet ensemble de donnes, les fréquences sont égales aux probabilités au STADE 4 (**7,05%** et **6,17%**) et non pas aux probabilités initiales (**6,8%** et **6,19%**).
Bien sûr, du point de vue des conclusions de la loi de Bayes cela ne change rien pour l'instant mais en tirant des donnes où les cartes sont comme dans notre donne, pour évaluer les probabilités, vous êtes en conformité avec une loi statistique primordiale qui nous dit que :

Quand on veut juger de la probabilité d'un caractère chez un sujet appartenant à plusieurs classes, en général **la fréquence** du caractère n'est pas la même dans toutes ces classes et **la probabilité** de ce caractère chez le sujet doit être assimilée à la fréquence du caractère dans **la classe la plus restreinte** contenant ce sujet.

C'est la loi statistique de la classe la plus restreinte. Pour donner un exemple simple :
●Si **70%** des ménages qui gagnent entre 20.000 et 30.000 euros par an sont équipés en Internet
● Si **40%** des ménages qui ont 3 enfants sont équipés en Internet
● Si **60%** des ménages qui ont 3 enfants et gagnent entre 20.000 et 30.000 euros par an sont équipés en Internet.
● Quand un ménage a 3 enfants et gagne entre 20.000 et 30.000 euros par an, il appartient aux 3 classes mais sa probabilité d'être équipé en Internet est **60%** . (Classe la plus restreinte)
Ici, le sujet est la donne que nous sommes en train de jouer, et le caractère recherché est soit la présence de ♠DV secs soit la présence d'un honneur sec en nord. Notre donne appartient à toutes les classes qu'on peut composer avec les mains possibles à chaque stade. Il ne fait aucun doute que notre donne appartient à la classe où **♣A32 ♦2** sont en Nord et

♣**RD4** ♦**3** sont en Sud. Au stade 4, notre donne n'appartient à aucune classe plus restreinte que celle là. C'est donc en son sein qu'il faut évaluer la fréquence des honneurs recherchés en tirant exclusivement des donnes où ♣**A32** ♦**2** sont en Nord et ♣**RD4** ♦**3** sont en Sud.
Et cette fréquence et elle seule, pourra être assimilée à une probabilité.

Revenons à notre problème et

progressons jusqu'aux STADE 5 puis 6 et demi

Au stade 5 le déclarant joue pique. Nord fournit le V et Sud le 2.
La classe la plus restreinte contenant notre donne est celle qui situe ♣**A32** ♦**2** ♠**V** en Nord et ♣**RD4** ♦**3** ♠**2** en Sud.
C'est donc dans cette classe de donnes qu'il faut assimiler la fréquence de la ♠**D** en Nord à sa probabilité. Cela explique pourquoi Borel tente de justifier la loi de Bayes en faisant fournir à Nord tantôt le valet, tantôt la dame **à partir de ces mains qui sont les mains possibles**.

Note de l'auteur
Non seulement Borel connaît la loi de la classe la plus restreinte mais dans « Valeur pratique te philosophie des probabilités » (1939), il en discute le principe en contestant une affirmation de Reichenbach (Philosophe et logicien allemand) sur le sujet des cas isolés.
Et comme Borel et Reichenbach dissertent sur des exemples statistiques « flous », sans définir le référentiel, l'espace de probabilités dans lequel ils se situent, sans faire intervenir la notion d'intervalle de confiance qui conditionne la valeur et la fiabilité des fréquences évaluées (et donc leur pertinence en tant que probabilité) , la discussion prend un tour surréaliste qui est un pur morceau de bravoure.
Pour illustrer que le concept de probabilité repose toujours sur une vision en fréquence, l'un prétend qu'on peut évaluer la probabilité pour que Jules César ait visité l'île de Bretagne en compilant les chroniques d'époque (je vous avoue que je trouverais tordant qu'on me dise que la probabilité pour que Jules César ait visité l'île de Bretagne est de 52,14%) et l'autre conteste timidement la loi de la classe la plus restreinte sur un exemple où il s'agit de mesurer (en fonction de divers paramètres) la probabilité de mourir de la tuberculose. Il objecte qu'en restreignant la classe jusqu'à l'individu cette probabilité ne voudra plus rien dire (comme si, en matière statistique, on pouvait appeler « classe » un individu ou un sous ensemble sur lequel la probabilité est dépourvue de toute signification ou de toute fiabilité).
On voit que les notions impulsées par Kolmogorov en 1933 ne sont pas encore mûres dans les esprits en 1939 et que les deux débatteurs ne les digèrent pas au mieux.
En gros, ce que nous dit Kolmogorov avec son axiomatique, c'est qu'il y a plus qu'une nuance entre le sens **commun** du vocable « probabilité » et son sens **mathématique** et il définit les conditions dans lesquelles les probabilités sont du ressort des mathématiques.
Il semble que ni l'un des autres des contradicteurs ne l'aient compris.

Au stade 5, les probabilités de partage des piques ont profondément évolué, comme c'est le cas chaque fois qu'on joue d'une couleur dont on s'intéresse au partage.
Si Sud a fourni le ♠2 et Nord le ♠V, un certain nombre de partages qui au début étaient possibles sont devenus impossibles. Par exemple, Sud n'a pas le ♠3 sec ou ♠V2 ou ♠V32 ou ♠ DV32.
Y aurait – il quelqu'un pour contester que ces probabilités sont nulles ? Non. Bien, alors il n'y a personne pour contester que les probabilités au stade précédent n'ont plus aucune pertinence.
Par contre, la fourniture du valet en Nord nous pose un problème. Nous avons que V sec ou DV secs sont incontestablement possibles en Nord mais que dire de V3 ou DV3?
Après tout, un Nord facétieux et parfaitement au courant de sa situation pourrait fournir le V avec V3 ou DV3 sans aller contre ses intérêts donc nous n'avons pas le droit de considérer que cette probabilité est nulle. Les seules spéculations raisonnables en matière de fourniture sont celles qui excluent qu'un joueur ait agi à l'encontre de son intérêt.

Par exemple, si nous jouons le 2 de **A432** vers **R1098** et que No2 fournisse le valet, nous exclurons qu'il ait fournit cette carte avec V5 , V6 , V7 ou V76 car cela équivaut à rendre prenable la dame de son partenaire qui ne le serait pas s'il avait agi autrement.
Autre exemple: si No 2 ne met pas le V avec DV5 il agit contre son intérêt car il ne fera aucune levée si on passe le 10.
Mais dans notre exemple, spéculer sur la présence de V3 ou DV3 en Nord ne présente aucun intérêt. Notre choix est de tirer en tête ou de faire l'impasse et même s'il est de tirer en tête **il sera beaucoup plus opportun quand nous serons remonté en Est (stade 6) et que nous aurons joué un nouveau petit pique vers R10 (stade 6 et demi)**. Pourquoi ? Parce que c'est à ce stade, quand Sud aura fourni, que nous évaluerons les probabilités les plus pertinentes, comme dans un jeu de découverte.
Si Sud met la dame ou défausse, notre problème est réglé car les probabilités ont évolué jusqu'à la certitude. Si Sud fournit le 3, l'hypothèse qui pouvait situer V3 en Nord n'a plus de justification et il nous faut choisir entre V sec ou DV secs.
À ce stade, (le STADE 6 et demi) il n'y a plus que 2 hypothèses possibles **V** sec ou **DV** secs et la somme de leurs probabilités doit totaliser 100%. Si elle prétend caractériser la probabilité à ce stade, la loi de Bayes elle-même doit s'appuyer sur l'ensemble des mains qui attribuent exclusivement ces cartes aux joueurs et cet ensemble comporte **54%** de **DV** secs et **46%** de **V** secs. Nous sommes loin des **6,8%** et **6,2%** initiaux, les dames sèches et d'autres combinaisons de piques ont disparu du paysage des possibles et imaginer qu'il faille encore vous en remettre aux fréquences initiales pour estimer la probabilité de votre manœuvre relève d'une vision bancale des probabilités.

les pièges de la vision en fréquence

Supposons que vous entriez au hasard dans une salle de cinéma qui passe « Hiroshima, mon amour» 10 fois par semaine et « Maciste contre les Pharisiens » 2 fois par semaine .
Si vous pariez avant de rentrer dans la salle sur le film que vous allez voir, il est évident que vous avez intérêt à le faire pour « Hiroshima » . Mais si vous pariez une fois entré dans la salle alors qu'apparaît à l'écran un grand brun baraqué mais plutôt huileux, vêtu d'une petite jupette rouge marquée d'un « M » brodé au point de croix et faisant des essais de balistique avec des petits bruns chafouins coiffés d'une balayette de chiotte et agitant des épées dans tous les sens, misez plutôt sur « Maciste » si vous ne voulez pas passer pour un de ces « Pharisiens » qui en prennent plein la gueule tout au long du film .
10 fois par semaine ou 2 fois par semaine sont des fréquences. Le grand brun, la jupette avec un « M », les balayettes de chiotte et les épées sont des indices qui restreignent considérablement les possibles et augmentent formidablement la probabilité de « Maciste ».
Connaissant la fréquence des films , il ne fait aucun doute que si vous entrez 12000 fois dans la salle pour voir un film au hasard , vous verrez environ 10000 fois « Hiroshima » et 2000 fois « Maciste » .
Mais une fois aperçue la première image du film, il serait idiot de baser votre pari sur ces chiffres plutôt que sur ce que vous avez vu.

Essayons autre chose :
Supposons que vous entriez pendant le générique. Si le nom de Valet apparaît 46 fois au générique de Hiroshima tandis qu'il apparaît 54 fois au générique de Maciste, accompagné de celui de Dame. Supposons que Valet soit le seul nom du générique que vous ayez entrevu, il ne sert à rien d'imaginer que vous auriez pu voir écrit Dame si le film était Maciste et de penser que de ce fait vos chances pour que le film soit Maciste sont inférieures de moitié.
Si le nom de Valet n'était pas accompagné du nom de Dame dans le générique, vous parieriez sur Maciste, si le nom de Dame vous était apparu, vous auriez eu la certitude que le film est Maciste, alors comment la possibilité de conjonction des deux noms peut elle diminuer la probabilité pour que ce soit Maciste ?

Vous n’avez un problème de probabilités que parce que c’est le nom de Valet qui apparaît à l’écran et ce problème vous enjoint de comparer la fréquence de Valet dans le générique de Maciste à la fréquence de Valet dans le générique d’Hiroshima.
Si c’était le nom de Dame qui apparaissait dans le générique, il n’y aurait plus de problème de probabilités et la comparaison d’une donne de bridge au générique du film n’aurait plus de raison d’être, n’aurait plus aucun sens, puisque dans une donne de bridge, le problème subsiste quand la dame apparaît.

Si Borel et les théoriciens au bridge ont eu recours à la loi de Bayes, c’est que leur bon sens était mis à rude épreuve dans plusieurs situations où une vision en fréquence semblait contredire les conclusions du calcul de probabilité basé sur les mains possibles:
Dans le cas du moindre choix, les probabilités semblent recommander le jeu de tête alors qu’il est visible que sur un grand nombre d’épreuves on va se heurter à plus d’honneurs secs qu’à des honneurs en couple.
Comment expliquer cette contradiction ?

Pour comprendre, à quel point la vision en fréquence pervertit le concept traditionnel de probabilité, il suffit d’imaginer la situation suivante : vous êtes dans une île dont la population est formée de 680 valets mariés à une dame , de 620 valets célibataires et de 620 dames célibataires.
Parmi les 1300 valets, 620 ont la télévision. Donc on peut dire que 52,3% des valets ont la télévision.
Si vous rencontrez un valet au hasard quelle est la probabilité qu’il ait la télévision ? 52,3% évidemment
Parmi les valets, la proportion de ceux qui sont mariés est bien 620/1300 soit 52,3%.
Si vous rencontrez un valet au hasard quelle est la probabilité qu’il soit marié à une dame ? 52,3% évidemment
Et bien quand vous jouez une donne, c’est ce que vous faites, vous rencontrez un valet au hasard.
Et ce n’est pas parce qu’en amont un pignouf a décidé de vous faire rencontrer une fois sur deux un valet plutôt qu’une dame que cela change quelque chose à la probabilité d’un valet d’être marié.
Car cette probabilité provient **de la compilation de l’état civil des valets** et non d’une manipulation déformant notre perception de la réalité.
Et dans notre donne, ce qui détermine l’état civil des valets c’est la distribution aléatoire des cartes et pas le mode de fourniture des adversaires.
D’ailleurs, une fois qu’on aura rencontré ce valet et évalué notre probabilité à sa juste valeur (52% de chances pour qu’il soit marié à une dame) , on quittera cette île à la con pour toujours, on abandonnera le bridge pour se consacrer au bilboquet, peut être même qu’on ira mourir dans un coin.
Bref , l’adversaire n’aura pas l’occasion de fournir une seconde fois.
C’est pour vous dire que le mode de fourniture de l’adversaire, vraiment.... on s’en tape.
Et l’institut de sondage chargé de faire les statistiques ne va pas se baser sur une vision en fréquence pervertie par le pignouf qui lui adresse une dame une fois sur deux avec DV, il va prendre un valet deux valets, 1000 valets si possible et il va compter parmi eux la proportion de ceux qui sont mariés. Il en déduira que la probabilité pour un valet d’être marié est 52% .
Et il ne fera pas l’impasse : il tirera en tête.
Surtout si c’est un chaud lapin !

il faut que vous compreniez que vous n’êtes pas au casino en train de tester une martingale contre un donneur prolifique associé à un fournisseur mécanique. Vous êtes à une table de bridge en train de jouer une donne unique face à des adversaires uniques ou qui en tous cas feront tout pour ne pas réagir mécaniquement, juste pour vous embêter.

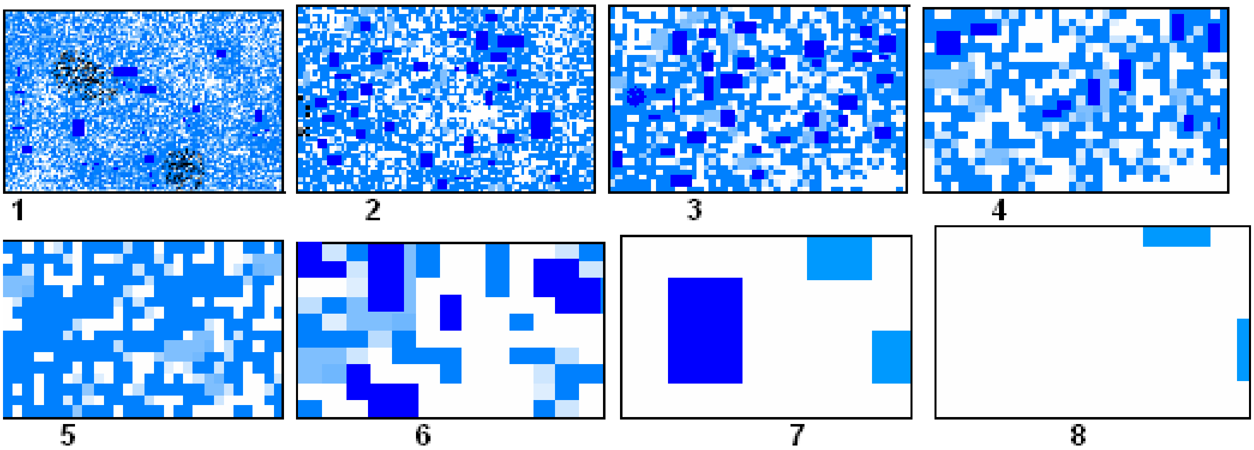
Déterminer une probabilité en matière de bridge c'est essayer de deviner comment la distribution aléatoire (qui a déjà fait son œuvre avant que l'adversaire n'ait fourni la moindre carte) a pu répartir les cartes non localisées en fonction de celles dont nous connaissons la localisation.

Si vous comprenez que la localisation des cartes ne doit rien au mode de fourniture de l'adversaire vous avez fait un grand pas pour admettre que la probabilité que vous calculez est **la probabilité pour que les mains adverses vérifient telle hypothèse dans le cadre de telle configuration partielle** (une configuration que nous exhumons carte à carte) et non pas **la probabilité pour que les mains adverses vérifient telle hypothèse dans la mesure où l'adversaire a adopté tel mode de fourniture.**

Si vous comprenez que **toute carte localisée** (et pas seulement celle qui dévoile une grande fracture dans la symétrie des mains inconnues) a une grande importance, un impact déterminant sur le calcul de toute probabilité vous avez fait un grand pas pour admettre l'exigence de conformité avec les possibles, la loi de la classe la plus restreinte et compris que tout expérience en fréquence qui prétend illustrer une probabilité doit situer toutes les cartes localisées exactement comme dans la donne qui nous préoccupe.

La règle du zoom

l'évaluation d'une probabilité est – elle plus pertinente quand on l'évalue dans l'ensemble initial des possibles ou quand on l'évalue en cours de donne dans un sous ensemble des possibles réduit par les évènements avérés ?
Pour nous faire une idée, imaginons la situation suivante :



Un satellite retombe sur terre. Il nous envoie des photos de la zone où il va tomber. On sait qu'il peut tomber n'importe où dans la zone photographiée. Chaque photo est en fait un zoom rapproché d'une partie de la précédente.

Le problème est de déterminer s'il va retomber sur l'eau (zone bleue) ou sur la terre ferme (zone blanche). On a les moyens de mesurer sur chaque photo, l'importance relative des deux zones.
La situation se reproduit plusieurs fois.
Sur la première photo, il y a **toujours** une zone bleue d'étendue **55%**.
Le pourcentage d'étendue de la zone bleue est aléatoire sur les photos suivantes, selon la trajectoire erratique de l'engin, et peut varier de **0%** à **100%** en fonction de la configuration du lieu d'impact.

Il est incontestable qu'au moment où la première photo est prise, la probabilité pour que le satellite tombe dans une zone bleue est de 55%. Ce qui veut dire que si le satellite tombe un très grand nombre de fois, l'impact final aura lieu en gros 55 fois sur 100 dans une zone bleue. Miser sur l'impact dans une zone bleue équivaut à adopter une stratégie qui nie le caractère particulier de chaque chute. Une stratégie qui a pour but d'être rentable sur un grand nombre de situations répétitives en négligeant toute photo postérieure à la 1ere .
Malgré cela, si vous deviez parier sur la couleur de la zone d'impact, vous fieriez vous à la première photo ou à la dernière ? **À la dernière bien sûr**. D'ailleurs pourquoi prendrions nous comme base de notre estimation de la probabilité plutôt la 1ere photo que la 2e que la 3e …
Seule la dernière est opportune. **Dés que le satellite a bougé, l'ensemble des régions où l'impact est possible n'est plus celui de la première photo. C'est celui de la dernière photo**.
La première photo donne 55% de bleu, la dernière donne 45% de bleu.
D'après vous globalement quelle sera la stratégie la plus rentable celle qui consiste à miser systématiquement sur bleu en vous fiant à la première photo ? Où celle qui vous recommande de miser sur la zone la plus probable dans la dernière photo ?
La deuxième stratégie, bien sûr car en suivant les conclusions de la dernière photo, je devrais en principe améliorer le score de 55% en évitant de miser sur le bleu dans les 45% de cas où le satellite retombe sur une zone blanche. .

Et bien en matière de bridge, c'est la même chose.
Au début, la main inconnue se cache dans un paysage de mains possibles foisonnant (plus de 10.000.000 de possibilités).
Chaque carte fournie permet de **faire un zoom dans l'ensemble des mains possibles** et de le réduire.
Et c'est dans le paysage résultant, dans ce paysage et aucun autre, que s'exerce la probabilité.
La première carte fournie par les flancs, à elle seule, supprime la moitié des mains possibles du paysage.
5.000.000 de mains possibles disparaissent de nos hypothèses et elles ne joueront plus aucun rôle dans nos spéculations.
Et ce rythme cataclysmique va perdurer tout au cours de la donne et le nombre de mains possibles va diminuer fortement à chaque carte fournie, jusqu'à ce qu'il ne reste que 2 possibilités à la fin de l'avant dernière levée.
Comprenez vous à quel point il est illogique de fonder les probabilités au cours du jeu de la carte sur ce qu'était le paysage des possibles au début de la donne, avant l'entame ?
Dans notre donne, quand le valet apparaît, il faut faire un zoom sur les mains possibles qui contiennent le valet :
Nord peut avoir **♠V** ou **♠VD** ou **♠ V3** ou **♠ VD3**.
On peut supprimer les hypothèses de **♠V3** ou **♠VD3** en supposant qu'avec ces mains Nord aurait fourni le **3** (ce qui revient à prétendre que la probabilité de ces mains est nulle) mais on le ferait à nos risques et périls, car en fournissant le valet, Nord fait preuve de fantaisie mais il n'agit pas contre les intérêts de son camp, il ne sacrifie pas une levée.
De toute façon, cela n'a aucune importance car notre maniement ne deviendra irréversible qu'à la 2e levée de pique, lorsque nous aurons joué pique vers Nord pour la seconde fois. C'est donc une fois que Sud aura fourni sa seconde carte que nous choisirons de tirer en tête ou de faire l'impasse et le problème ne présente un intérêt que si la carte fournie par Sud est le **3.**
À ce stade, un **nouveau zoom sur la main de Nord** nous apprend que la distribution initiale lui a donné soit **DV** secs , soit **V** sec et comme nous s'avons qu'elle lui a plus probablement donné **DV** secs que **V** sec , **nous tirons en tête comme nous le faisons dans toutes les situations, où nous avons le choix entre tirer en tête et faire l'impasse lorsque la seule carte restant en jeu est l'honneur cherché**.

1er **exemple** : maniement de ♠ **ARD10** face à ♠**432** pour 4 levées.
Nous avons joué 2 fois pique les adversaires ont toujours fourni. Nous jouons le 3e pique vers D10, un petit pique apparaît à gauche, il ne reste que le valet en jeu → Nous tirons en tête.
2e **exemple**, la règle des 9 que nous allons voir à l'œuvre dans une situation étonnamment semblable à celle que nous avons choisie pour illustrer le moindre choix.

Moindre choix et règle des 9.

Dans la donne que nous analysons pour illustrer le moindre choix les piques étaient ainsi répartis entre nos deux mains :

● Donne 1 : Ouest ♠ AR1098 Est ♠ 7654

et les adversaires se partageaient ♠ **DV32**

Supposons que nous ayons maintenant à manier les couleurs suivantes

● Donne 2 : Ouest ♠ AR1098 Est ♠ V765

les adversaires se partageant ♠ **D432**

● Donne 3 : Ouest ♠ AR1098 Est ♠ DV76

les adversaires se partageant ♠ **5432**

Dans la donne 2, par rapport à la donne 1 nous avons échangé le ♠**V** et le ♠**4** et le problème est de trouver la ♠**D.**

Ce problème est connu et répertorié sous le nom de règle des 9.
« Avec 9 cartes, il faut tirer en tête pourvu que le début du coup n'ait pas fait apparaître une dissymétrie d'au moins 2 cartes connues surnuméraires en Nord. . » C'est une loi au moins aussi commune que celle du moindre choix et pourtant, il semble qu'elles soient contradictoires, puisque dans notre donne, bien que la camp Est – Ouest ait 9 piques, quand Nord fournit le Valet, le moindre choix préconise de faire l'impasse.
5e levée : Sud fournit le ♠**2** et Nord le ♠**4.**
Contrôlons votre vision en fréquence.
Dans les deux donnes, la fréquence de V sec est la même que la fréquence de 2 sec ou 3 sec ou 4 sec et la fréquence de DV secs est la même que celle de D4 secs ou de n'importe quel doubleton.
Quand Nord fournissait le ♠**V** vous disiez « il y deux fois plus d'honneurs secs que de DV secs donc je fais l'impasse ».
Ici, vous devriez dire : « il y a 3 fois plus de petites cartes sèches (4 sec, 3 sec, 2 sec) que de D4 secs » et donc vous devriez encore plus faire l'impasse. Pourtant vous ne la faîtes pas.
En fait ce n'est pas ainsi que vous raisonnez. Vous dîtes « il y a un peu plus de D4 secs que de 4 secs donc je tire en tête» C'est donc la fréquence des deux combinaisons possibles que vous comparez. Mais pourquoi, quand le V est fourni, ne pas procéder identiquement et comparer la fréquence de DV secs et de V sec puisque ce sont les deux seules combinaisons possibles dans la main de Nord ?
En gros si vous jouiez au bridge les yeux bandés et qu'on vous dise « Nord a 4 sec ou D4 secs que faites vous ? » vous tireriez en tête au nom des proportions relatives de ces deux combinaisons. Mais si l'on vous disait « Nord a V sec ou DV secs que faites vous ? » vous feriez l'impasse alors que les proportions relatives des deux combinaisons sont les mêmes.
Si vous êtes Nord, il vaut mieux toucher DV que D4 car dans le premier cas on ne vous prend jamais la dame alors que dans le second, on vous la prend toujours.
Quand vous touchez DV vous devez votre privilège au fait que votre adversaire ayant été choqué par l'apparition du valet, il est entré dans une transe hallucinatoire qui lui a donné la

vision de lui-même confronté à toutes les répartition possibles au début du coup, l'adversaire fournissant une fois le valet et une fois la dame avec DV, ce qui produit une **fréquence de possession de la dame quand on fournit le valet** qui est inférieure de moitié à la **fréquence de possession de la dame quand on a le valet.**
Pourquoi votre adversaire, contrairement à ce qu'il fait dans toutes les autres situations de bridge préfère – t – il s'intéresser à la **fourniture du valet** plutôt qu'à sa **possession** ? Mystère. D'autant qu'il ignore les règles de fourniture de Nord avec DV. Il ne vous reste plus qu'à hausser les épaules et à encaisser la levée de la dame.

Pour résumer,
Les calculs des tenants du moindre choix sont les suivants
● si les adversaires possèdent ♠**5432** , sud a fourni **32** et Nord le **4**. Probabilité du **5** en Nord **62%**.
Je remplace le 5 par la D .
● si les adversaires possèdent ♠**D432** , sud a fourni **32** et Nord le **4.** Probabilité de la **D** en Nord **52%**.
Je remplace le 4 par le V.
● si les adversaires possèdent ♠**DV32** , sud a fourni **32** et Nord le **V**. Probabilité de la **D** en Nord **35%**.

Si **X** est la carte cherchée et **Y** la carte fournie en Nord, dans chaque cas la question que l'on se pose est quelle est la probabilité de la répartition
X32 / Y par rapport à la répartition **32 / XY** ? Dans chaque cas, si l'on parcourt l'ensemble des cas possibles,
la proportion de **X32 / Y** par rapport aux **32 / XY** est la même (**48 / 52**) et pourtant, la stratégie du moindre choix trouve, pour quantifier ces possibilités respectives, des probabilités différentes.
Pour moi, Il ne fait aucun doute que le traitement de ces 3 exemples par la théorie du moindre choix constitue une approche intéressante du mystère de la sainte trinité.

En fait, si je devais me risquer à une hypothèse sur les raisons qui ont provoqué l'invocation du moindre choix et de la loi de Bayes dans les problèmes de bridge, je dirai qu'elles tiennent à l'enracinement d'un mythe très vivace chez les bridgeurs et plus généralement chez les joueurs : ils s'imaginent confrontés à toutes les situations possibles dans un contexte donné et assimilent la probabilité à la rentabilité d'une stratégie dans ce contexte sans se préoccuper de réduire ce contexte à la situation qui est effectivement la leur.
Par exemple quand il rencontrent un valet et que valet – dame sont dans la nature, ils se voient confrontés à l'ensemble des donnes où soit l'un de ces honneurs soient les deux honneurs seraient secs et si ils ont la certitude qu'ils rencontreront plus d'honneurs secs que de couples d'honneurs, dans leur vie de bridgeur, ils préconisent le jeu de tête.
Mais hélas, la stricte application des probabilités à cette situation qui leur impose une restriction des cas possibles (les dames sèches n'ont rien à voir dans une situation qui voit les adversaires fournir le valet) ne donne pas les résultats escomptés et aucun outil mathématique ne vient confirmer la solidité de leurs certitudes. Qu'à cela ne tienne, si l'outil officiel ne s'annonce pas convaincant, on va en inventer un autre et la majorité des bridgeurs ne tardera pas à nous suivre dans cette voie qui va apparaître comme un couronnement de leurs certitudes par une science empressée à leur donner raison.
C'est là qu'intervient la loi de Bayes et tant pis si, appliquée à une situation de bridge, elle transgresse une demi douzaine des règles qui garantissent la cohérence d'un système de probabilités.

Vous démontrer que vous bafouez les mathématiques en agissant ainsi, vous démontrer que pas mal d'évidences contredisent celles que vous avez choisi de favoriser à priori n'est pas chose facile.
Mais le plus difficile sera de vous expliquer qu'en fait vous pouvez adopter toutes les stratégies que vous voulez et vous appuyer sur la vision en fréquence qui vous arrange sans vous demander si cela à un sens dans le contexte luxuriant de l'ensemble des donnes de bridge, mais que vous ne pouvez en aucun cas le faire en vous réclamant de la science des probabilités dans la mesure où vous n'avez procédé à aucune démarche axiomatique et dans la mesure où vous ne respectez pas la définition des cas possibles et favorables au moment où vous procédez à l'évaluation de la probabilité.

La preuve par 13

Au début du coup, Nord et Sud se partagent les 26 cartes suivantes :
♠DV32 ♥ V8765432 ♦ 10875432 ♣ ARDV432
Vous prétendez que lorsque la situation est la suivante, au cours de la 7e levée :

NORD	**♣2**	**♣3**	**♣A**	**♦2**	**♠V**	**♥2**							
SUD	**♣R**	**♣D**	**♣4**	**♦3**	**♠2**	♥3	**♠3**						

La probabilité de la **♠D** en Nord est **35%** conformément au principe de moindre choix.
Soit.
Mais quelle est la probabilité de trouver en Nord le **♥4**, le **♦5**, le**♣V** ou une autre des **12** cartes encore non localisées (♠D exclue)?

● Si nous raisonnons selon vos principes, au début du coup il y avait **10.400.600** mains possibles.
Parmi elles il y avait
C_{21}^{11}**= 352.716** mains contenant le **♠V** sec et le **♥4** (ou une autre des 12 cartes non localisées)
293.930 mains contenant le **♠V** sec sans **♥4**
C_{21}^{10}**= 352.716** mains contenant **♠DV** secs et le **♥4** (ou une autre des 12 cartes non localisées)
352.716 mains contenant **♠DV** secs sans le **♥4**
Mais comme avec ces dernières on ne fournit le valet qu'une fois sur deux, quand ce valet est fourni en Nord, il provient
352.716 fois de mains avec ♠V secs et ♥4 , **293.930** fois de mains avec ♠V sec sans le ♥4 , **176.358** fois de mains avec ♠DV et le ♥4, **176.358** fois de mains avec ♠DV sans le ♥4.
Et en somme, sur les coups où le ♠V aura été fourni le ♥4 se trouvera
en Nord 352.716 + 176.358 = **529.074** fois
et en Sud 293.930 + 176.358 = **470.288** fois.

Donc selon le procédé de calcul du moindre choix, quand le **♠V** est fourni une fois sur deux avec **VD** secs :
La fréquence de ♥4 (ou de l'une des 12 cartes non localisées) en Nord est 529.074 / 999.362 = **53%.**
La fréquence de ♠D en Nord est 35%.

Désignons maintenant au hasard l'une des 7 cartes que Nord a encore en main :

NORD	♣2	♣3	♣A	♦2	♠V	♥2				X			

Quand on dit, par exemple, que la probabilité de la ♠D en Nord est de **35%**, cela signifie que **35%** est la probabilité pour que la ♠D se trouve parmi ces 7 cartes. Cette probabilité est évidemment répartie de façon uniforme sur chacune de ces 7 cartes (aucune ne peut avoir plus de chance qu'une autre d'être la ♠D) et donc ....

La probabilité que la carte marquée d'une croix soit la ♠D est

35% divisé par **7 = 5%** .

Le même raisonnement est valable en ce qui concerne le ♥4.

La probabilité que la carte marquée d'une croix soit le ♥4 (ou une autre carte non localisée précise) est

53% divisé par **7 = 7,58%** (par excès)

La probabilité pour que la carte marquée d'une croix soit le ♥4 , le ♦5, le♣V ou l'une des 12 cartes non localisées autre que la ♠D est :

7,58 % multiplié par **12 = 91%** par excès .

La probabilité pour que cette carte soit la ♠D **OU** le ♥4 **OU** le ♦5 **OU** le♣V **OU** l'une des 12 autres cartes non localisées est donc :

91% + 5% = 96% au plus.

Grâce au procédé du moindre choix, nous venons donc d'évaluer à **96%** la probabilité pour que la carte marquée d'une croix, qui n'a pas encore été jouée par Nord, soit une carte non localisée.

Tiens ! L'assertion que cette carte n'a pas encore été localisée, n'est elle pas, en fait, une certitude ?

Et en tant que telle sa probabilité ne devrait – elle pas être **100%** **?**

On en déduit que le moindre choix se révèle incohérent quand on applique ses principes à l'ensemble des cartes inconnues ?

● Mais peut être que le moindre choix n'est plus de mise pour calculer la probabilité du ♥4 en Nord et qu'il vaut mieux utiliser la loi des places vacantes exposée par J.M. Roudinesco dans « Testez votre bridge. Probabilités et lecture des mains de H. Kesley ».

Une loi qu'on peut qualifier de « sulfureuse », pour la distinguer de la nôtre, car, on ne sait pas trop pourquoi, seules sont prises en compte les couleurs dont il ne manque qu'une carte à localiser.

Aux termes de cette loi, seuls les piques et les trèfles sont localisés à une carte près et donc voilà quelles sont les places vacantes (en jaune):

NORD	♣2	♣3	♣A	♦2	♠V	♥2							
SUD	♣R	♣D	♣4	♦3	♠2	♥3	♠3						

9 places vacantes en Nord et 8 en Sud.

La probabilité du ♥4 en Nord (ou d'une autre des 12 cartes non localisées) est donc **9/17** soit **53%** par excès.

Et le même raisonnement que précédemment sur la probabilité pour que l'une des cartes non jouées de Nord soit

la ♠D **OU** le ♥4 **OU** le ♦5 **OU** le♣V **OU** l'une des 12 autres cartes non localisées est encore **96%**.

Ce qui démontre l'incompatibilité de la probabilité donnée par le moindre choix pour la ♠D avec la probabilité donnée par procédé des places vacantes pour les autres cartes.

● Testons maintenant la cohérence de notre propre procédé de calcul de la probabilité:
Aux termes de la loi que nous préconisons, quand nous ne savons pas comment sont partagés les couleurs entre les flancs, les places vacantes sont prosaïquement les cartes que chaque joueur a encore en main:

NORD	♣2	♣3	♣A	♦2	♠V	♥2				X			
SUD	♣R	♣D	♣4	♦3	♠2	♥3	♠3						

7 en Nord et 6 en Sud.
La probabilité de trouver la ♠D en Nord est donc **7/13** soit **53,84%**
La probabilité de trouver le ♥4 (ou une autre des 13 cartes non localisées) en Nord est aussi **7/13** soit **53,84%**

Dans notre dispositif, à ce stade comme au début du coup le ♥4 et la ♠D sont **équiprobables** en Nord.
♠V ET ♥4 étaient au début du coup aussi probables en Nord que ♠V ET ♠D et on ne voit pas pourquoi l'apparition du ♠V en Nord permettrait de supposer que brusquement, il est plus probable que le ♥4 l'accompagne , plutôt que la ♠D comme semblent le proclamer les dispositifs que nous venons d'étudier.
Intuitivement, ce devrait même être plutôt le contraire puisque l'apparition du V suscite immédiatement l'hypothèse qu'il pourrait être accompagné de la D alors que rien ne suggère qu'il pourrait être accompagné du ♥4.
♠D et ♥4 sont aussi **équiprobables** en Sud. Simplement, chacun d'eux est moins probable en Sud qu'en Nord parce que la main de Sud recèle moins de possibilités d'hébergement que celle de Nord.
Tout cela est en somme très simple et très logique.

Donc dans notre dispositif d'évaluation
La probabilité pour que la carte marquée d'une croix soit par exemple la ♠D (ou une autre carte) est **7/13** divisé par **7 = 1/13**
La probabilité pour que cette carte soit la ♠D **OU** le ♥4 **OU** le ♦5 **OU** le♣V **OU** l'une des 13 cartes non localisées devient
1/13 multiplié par **13 = 1** soit **100%**
Cette fois, la probabilité de la certitude est bien 100% et notre procédé de calcul de la probabilité en cours de donne démontre toute sa cohérence.
Nous avons vu que ce n'était pas le cas du moindre choix.

En conclusion :

● La vision qui assimile la probabilité à la rentabilité d'une stratégie λ dans une expérience reproduisant les fréquences initiales galvaude la loi statistique fondamentale de la classe la plus restreinte. Elle fonde ses résultats sur de nombreuses situations incompatibles avec notre donne, somme ou compare des cas naturellement exclusifs qui ne se produiront jamais en même temps dans une donne et on peut démontrer que dans l'ensemble des mains initialement possibles, une stratégie basée sur le partage des cartes qui sont connues dans notre donne et supposées inconnues dans la stratégie λ est plus rentable (ou au moins aussi rentable selon les cas) que la stratégie λ tout en rendant, dans certaines situations, des conclusions opposées.
En somme, il est absurde de vouloir qu'un calcul de probabilité à un instant particulier d'une donne rende les mêmes conclusions qu'un calcul de fréquence appliqué à un stade antérieur et négligeant de nombreuses particularités de la donne jouée.

● Un ensemble où la modalité d'un caractère peut être choisie aléatoirement par un opérateur extérieur (comme c'est le cas des modalités « Valet fourni » ou « D fournie » dans un ensemble de mains comportant DV) ne peut constituer un espace de probabilités. Il est donc exclu d'appliquer la loi de Bayes en matière de bridge si l'on considère la fourniture comme un caractère attaché aux mains.
En outre les tentatives de Borel d'impulser cette loi comme une loi de probabilité « psychologique » se heurtent à de sévères réprimandes, comme le viol de l'axiomatique, de multiples incohérences ou contradiction avec les principes fondateurs des probabilités et pour finir un manque évident de portée pratique dés lors que la probabilité qu'on prétend calculer dépend d'un mode de fourniture qu'on ne connaît pas et qui peut changer à tout moment.
En matière de probabilités, la fourniture n'intervient que comme l'agent par lequel nous avons connaissance des restrictions apportées à l'ensemble des possibles, certaines de ces restrictions pouvant être déduites des lois du bridge. En d'autres termes si nos adversaires tombaient accidentellement des cartes sur la table au lieu des les fournir normalement, nous pourrions toujours faire des probabilités sur la conformation de leurs mains mais bien sûr ces probabilités ne seraient pas les mêmes que si nous savons que la fourniture des cartes obéit à certaines contraintes.

● Enfin, ne trouvez vous pas que pour évaluer vos chances, il vaut mieux faire confiance à la façon dont la distribution aléatoire a pu faire son œuvre plutôt qu'à la façon dont réagit l'adversaire quand il est confronté à un choix parmi plusieurs cartes **équivalentes**, ce qui est un fait anodin et sans incidence sur les cartes qu'il a effectivement en main ?
Autrement dit : fournir une carte a une incidence sur les probabilités puisque la localisation de cette carte réduit considérablement le nombre de mains possibles que la distribution aléatoire a pu attribuer aux joueurs. Fournir à la place une autre carte équivalente de la même couleur a la même incidence sur les probabilités. Mais le nombre de cartes équivalentes parmi lesquelles est exercé le choix, (si choix il y a eu) n'a pas d'autre impact sur le calcul de probabilités que de restreindre l'univers des possibles au regard des lois du bridge et de l'intérêt des joueurs.

Dans une donne de bridge, le seul calcul de probabilités mathématiquement admissible et cohérent à tous les stades est celui qui est basé sur le dénombrement des mains possibles et, parmi elles, des mains favorables à une hypothèse dont le rapport aux mains possibles exprime la probabilité de l'hypothèse.

En forme d'épitaphe

La liste des génies en délicatesse avec les institutions de leur temps est longue :
Il y a eu le chanoine Copernic, publiant honteusement son « De Revolutionibus …» à la veille de sa mort pour éviter les ennuis avec la hiérarchie de son église, il y a eu Galilée à qui l'on refusa, parmi quarante candidats, une bourse d'études, alors que son père était dans le besoin, et qu'on enferma dans sa chambre, devenu vieux, parce qu'il pensait, le fou, que la terre tournait autour du soleil, il y a eu Einstein, étudiant modeste qu'une première affectation confina dans l'obscur bureau des brevets de Berne avant qu'il ne publie une théorie tellement importante, tellement novatrice et tellement incomprise qu'on lui donna le prix Nobel pour une recette de cuisine qu'il avait griffonné à la hâte sur le coin d'une nappe, il y a eu Evariste Galois à qui l'on refusa plusieurs fois l'entrée à Polytechnique et qui, à la veille de mourir en duel pour les yeux d'une belle, à l'âge de 21 ans, laissa en guise de testament sur un rouleau de papier hygiénique une théorie mathématique qui allait révolutionner la discipline, il y a eu Giordano Bruno, brûlé vif sur ordre du saint – office parce qu'il soutenait la thèse que l'univers pouvait être infini …

Borel, lui, n'a pas eu cette chance.
Je veux dire la chance d'être un génie, pas celle d'être brûlé vif.
Il a fait des études brillantes, il a rapidement obtenu un poste prestigieux correspondant à ses mérites, il est décoré à la guerre, il épouse la fille d'un grand mathématicien (ce n'est certainement pas par hasard que l'anagramme du nom littéraire de sa femme, « Marbo », donne « Rambo »), il est l'ami d'un président du conseil et il fréquente Paul Valéry.
Mais il n'aime pas les mondanités, ce qui le conduit à faire de la politique pour le compte d'un groupuscule très marginal, les alter – mondanistes, et à devenir l'élu des Aveyronnais, une peuplade rurale du sud de la France, bien connue pour sa propension à enduire le mondain de goudron et de plumes et à l'humilier de diverses façons, avant d'offrir ce qu'il en reste à la concupiscence baveuse du verrat.
C'est toujours son refus des mondanités qui le conduit à accepter un de ces postes de ministre bisannuel de la marine que la III^{e} république confie de préférence aux gens compétents c'est-à-dire aux aveyronnais (l'Aveyron n'est pas très loin de la mer) qui fréquentent Paul Valéry, auteur d'un poème intitulé « le Cimetière marin » et futur pensionnaire de son œuvre.
Borel fut un excellent ministre de la marine en ce sens qu'il calcula que la probabilité pour que le Titanic rencontre un iceberg était pratiquement nulle.
Il fut aussi un académicien hors pair, portant le bicorne et l'uniforme avec élégance.
À cette réserve prés, que lors des cérémonies officielles, quand il s'inclinait pour saluer une personnalité, il se débrouillait toujours pour soulever la robe d'une mondaine située derrière lui avec son épée d'académicien. On ne se refait pas.

Bref, Borel était un type épatant.
Mais c'était aussi un mathématicien médiocre, consacrant l'essentiel de son temps à écrire de nombreuses monographies alors qu'il lui aurait été beaucoup plus profitable de lire celles de ses semblables. Surtout lorsqu'il leur arrivait de publier des choses importantes pour la discipline qu'il avait en charge d'enseigner.
C'était aussi un médiocre littérateur, produisant des textes dont l'obscure clarté était sans doute à la mesure de celle de son esprit au regard des choses mathématiques.
Aucune définition, aucun plan susceptible d'éclairer une démarche logique, aucune démonstration fondée sur une base axiomatique. Il reste un style péremptoire basé sur l'autorité du maître, le souci de faire partager les convictions personnelles à l'aide d'une argumentation basée sur le bons sens alors que la complexité des concepts abordés est justement propice à égarer le bons sens.
Si c'est de l'œuvre de Borel que la théorie du bridge tire sa pertinence, il est temps qu'elle fasse son examen de conscience.
Ceci dit, Borel, mon pote, repose en paix. Tu l'as bien mérité.