Main courte ou main forte?

NORD: intervient à 1♠

OUEST	EST
♠ 32	♠ R54
♥ AD84	♥ 32
♦ V108	♦ D432
♣ AV97	♣ R1086

SUD: soutient à 2♠

Faut – il chercher la ♣D en Nord ou en Sud?
En dehors de toute information sur les mains adverses, le problème est trivial: la probabilité de trouver la ♣D en Nord est la même que la probabilité de la trouver en Sud soit 50%.
Mais ici, le problème est plus intéressant parce que nous savons grâce à une intervention de Nord soutenue en Sud que le premier a 5 cartes à pique et que le second en a 3.
Il y a donc **10** places vacantes (10 non- piques) en Sud, contre **8** seulement en Nord ce qui accroit les chances de trouver la ♣D en SUD mais d'un autre côté, l'intervention de Nord crée, à priori, un déséquilibre des forces en sa faveur, ce qui rend les honneurs, dont la ♣D, plus probables de son côté.
Ceci dit, nos adversaires se partagent 20 points (2 as, 2 rois, 2 dames et 2 valets) et comme une intervention à pique n'en promet jamais que 8, pour prétendre que Nord est plus fort que Sud, il faudra se fier à la nature du soutien donné par Sud qui suppose une force inférieure à 10H.

Alors, faut – il chercher la ♣D dans la main courte à pique ou dans la main forte?

Faute d'informations plus précises sur les mains adverses, nous ne pourrons évidemment répondre de façon catégorique à cette question, mais, comme il s'agit d'un problème qui se pose fréquemment dans les donnes de bridge, nous pouvons toujours essayer d'étayer notre comportement par une quantification de la probabilité de la ♣D en Nord, en fonction des points qu'il possède.
Pour cela nous disposons de deux outils: le calcul de probabilités et un outil appelé "**statbridge**" qui est capable de tirer 100.000 donnes dans les conditions imposées (Est - Ouest avec les mains du problème, Nord avec exactement 5 piques et une zone de force fixée arbitrairement par l'opérateur) et d'évaluer avec quelle fréquence la ♣D se trouve en Nord dans cet échantillon.
En faisant varier la force donnée à Nord on verra à quel moment la probabilité de la ♣D dans sa main dépassera la barre de 50%.

Pour tester la fiabilité de statbridge, procédons d'abord à l'expérience suivante: Si nous ne fixons aucune contrainte de force à Nord, la probabilité de trouver la ♣D chez lui doit être donnée par la loi des places vacantes soit $P = \frac{8}{8+10}$ = **44,44%.**
Sur 100.000 donnes statbridge donne **44,42%**.
Ce qui est un résultat très satisfaisant.

D'ailleurs, sur des échantillons d'une telle importance, (100.000 donnes) on comprend qu'on pourra pratiquement faire confiance à statbridge les yeux fermés, mais il sera quand même intéressant de voir quel type de calcul il faudrait appliquer à cette situation et si ces calculs confirment les résultats donnés par le programme informatique.

Le verdict des statistiques

Voici les résultats obtenus par statbridge

Force de Nord	Fréquence de la ♣D en Nord
0-6H	**29%**
8-11H	**41,6%**
12-15H	**53,6%**
11H	**47%**
12H	**55,35%**

Il faut donc que les points soient partagés au moins 12-8 au profit de Nord pour que le déséquilibre des probabilités induit par le partage des piques soit compensé et qu'il soit plus intéressant de chercher la dame en Nord.
Ce résultat est loin d'être universel, il s'applique a une situation particulière et l'on ne peut en aucune façon le généraliser mais il a au moins le mérite de nous apprendre une chose:

En matière de probabilité de situation d'une carte, une dissymétrie de places vacantes de 2 cartes semble compensée quand le flanc long concentre 60% de la force.

Mais n'est – il pas étonnant que, statistiquement, il semble que la probabilité de trouver la ♣D en Nord soit plus grande quand Nord a exactement 12H que quand sa force oscille dans la zone 12-15H? Normalement cette probabilité devrait croitre quand Nord a 14H et croitre encore quand il a 15H.

Le verdict du calcul.

Les mains adverses sont composées de 13 cartes choisies parmi de 8 honneurs: 2 as, 2 rois, 2 dames, 2 valets (♠ADV, ♥ RV, ♦ AR , ♣D) et de 18 "petites cartes".
Pour faire, par exemple 12H avec ces cartes, il faut obligatoirement donner à Nord l'une des combinaisons d'honneurs suivantes:

combinaisons	AARV	AADD	AADVV	ARRD	ARRVV	ARDDV	RRDDVV
nombre	4	1	2	4	2	8	1

Pour avoir le nombre de combinaisons possibles de type AARV, (ces cartes faisant partie des 8 honneurs du flanc), on raisonne de la façon suivante : avec AA on ne peut faire qu'une combinaison (♠A♦A) , avec R on peut faire 2 combinaisons (♦R ou ♥R) , avec V on peut faire 2 combinaisons (♠V et ♥V). Donc en tout 1 x 2 x 2 = 4 combinaisons en associant chaque combinaison d'as à chaque combinaison de R et à chaque combinaison de V.
Ces 4 combinaisons sont:

♠A♦A♦R♠V	♠A♦A♦R♥V	♠A♦A♥R♠V	♠A♦A♥R♥V

Estimer que dés lors que 13 combinaisons sur 22 situent la ♣D en Nord la probabilité de la trouver dans cette main serait $\frac{13}{22}$ = 59% serait une erreur car toutes les combinaisons de pèsent pas le même poids en mains possibles.
En fait, il faut compter les combinaisons de 13 cartes possibles avec chaque combinaison d'honneurs, en tenant compte de la forme imposée à la main de nord, soit:
5 piques formés des honneurs affectés à la main + p petits piques parmi 5
Les autres honneurs affectés à la main + n petits non piques parmi 13.

Aucune autre condition n'étant affectée à la main de Nord que la longueur des piques le nombre de ses petits trèfles, carreaux, cœurs est quelconque dans la limite des cartes disponibles. Procéder autrement rendrait le calcul trop complexe et en outre, en procédant ainsi, les distributions incompatibles avec les enchères sont si rares qu'elles n'ont aucun impact notable sur le résultat.

On peut donc compter les mains qui contiennent une combinaison d'honneurs donnée.

Par exemple les mains qu'on peut construire en Nord avec AARV sont

Piques	nombre	Non piques	nombre	TOTAL
♠AV+3♠	10	♦AR+6X	1716	17.160
♠A+4♠	5	♦AR+♥V+5X	1287	6.435
♠AV+3♠	10	♦A+♥R+6X	1716	17.160
♠A+4♠	5	♦A+♥RV+5X	1287	6435
				47.190

On fait la même chose avec toutes les combinaisons d'honneurs totalisant 12 points:

Piques	nombre	Non piques	nombre	TOTAL
♠AD+3♠	10	♠D+♣D+6X	1716	**17160**
♠ADV+2♠	10	♦A+♥V+6X	1716	**17160**
♠AV+3♠	10	♦A+♥V+♣D+5X	1287	**12870**
♠AD+3♠	10	♦R+♥R+6X	1716	**17160**
♠A+4♠	5	♦R+ ♥R+♣D+5X	1287	**6435**
♠D+4♠	5	♦AR+♥R+5X	1287	**6435**
5♠	1	♦AR+♥R+♣D+4X	715	**715**
♠AV+3♠	10	♦R+♥RV+5X	1287	**12870**
♠V+4♠	5	♦AR+♥RV+4X	715	**3575**
♠ADV+2♠	10	♦R+♣D+6X	1716	**17160**
♠ADV+2♠	10	♥R+♣D+6X	1716	**17160**
♠AD+3♠	10	♦R+♥V+♣D+5X	1287	**12870**
♠AD+3♠	10	♥RV+♣D+5X	1287	**12870**
♠DV+3♠	10	♦AR+♣D+5X	1287	**12870**
♠DV+3♠	10	♥R+♦A +♣D+5X	1287	**12870**
♠D+4♠	5	♦AR+♥V+♣D+4X	715	**3575**
♠D+4♠	5	♥RV+♦A +♣D+4X	715	**3575**
♠DV+3♠	10	♥RV+R+♣D+4X	715	**7150**
♠AV+3♠	10	♦AR+6X	1716	**17160**
♠A+4♠	5	♦AR+♥V+5X	1287	**6435**
♠AV+3♠	10	♦A+♥R+6X	1716	**17160**
♠A+4♠	5	♦A+♥RV+5X	1287	**6435**
				241.670
				130.130

En jaune les mains où la ♣D est en Nord.
On peut donc construire en Nord 241.670 mains comptant exactement 5 piques et 12H avec les cartes du flanc. Et parmi ces mains 130.130 contiennent la ♣D.
Le calcul donne donc que dans ce cas, la probabilité de la ♣D en NORD est $\frac{130130}{241670}$ = **53,83%**
Ce chiffre est quand même passablement inférieur à celui que donne statbridge sur une échantillon de 100.000 donnes (– 2%) et bien sur très différent de celui que l'on obtiendrait en divisant le nombre de combinaisons qui contiennent la dame par le nombre total de combinaisons sans pondérer chaque combinaison par le nombre de mains possibles qui la contiennent (- 6%).

Mais si nous cherchons la probabilité de la ♣D quand Nord a 13H, nous allons rencontrer une surprise de taille.
Les combinaisons d'honneurs totalisant 13H sont, dans notre cas:

AARD	AARVV	AADDV	ARRDV	ARDDVV
4	2	2	8	4

20 combinaisons

Si l'on dénombre, comme précédemment les mains qu'on peut construire avec chacune des combinaisons d'honneurs totalisant 13H, voila ce que cela donne:

Piques	**nombre**	**Non piques**	**nombre**	**TOTAL**
♠ADV+2♠	10	♦A+♣D+6X	1716	**17160**
♠ADV+2♠	10	♦R+♥R+6X	1716	**17160**
♠ADV+2♠	10	♥RV+♣D+5X	1287	**12870**
♠ADV+2♠	10	♦R+♥V+♣D+5X	1287	**12870**
♠AD+3♠	10	♦AR+6X	1716	**17160**
♠AD+3♠	10	♦A+♥R+6X	1716	**17160**
♠AD+3♠	10	♦A+♥V+♣D+5X	1287	**12870**
♠AD+3♠	10	♥RV+♦R+5X	1287	**12870**
♠A+4♠	5	♦AR+♣D+5X	1287	**6435**
♠A+4♠	5	♦A+♥R+♣D+5X	1287	**6435**
♠A+4♠	5	♥RV♦R+♣D+4X	715	**3575**
♠AV+3♠	10	♥V+♦AR+5X	1287	**12870**
♠AV+3♠	10	♥RV+♦A+ 5X	1287	**12870**
♠AV+3♠	10	♦R+♥R+♣D+5X	1287	**12870**
♠D+4♠	5	♦AR+♥RV+4X	715	**3575**
♠V+4♠	5	♦AR+♥R+♣D+4X	715	**3575**
5♠	1	♦AR+♥RV+♣D+3X	286	**286**
♠DV+3♠	10	♦AR+♥V+♣D+4X	715	**7150**
♠DV+3♠	10	♦A+♥RV+♣D+4X	715	**7150**
♠DV+3♠	10	♦AR+♥R+5X	1287	**12870**
				209781
				103246

Sauf erreur de ma part, la probabilité de la ♣D en Nord quand il a 13H est $\frac{103246}{209781}$ = **49,21%**

Ce qui signifie que la probabilité pour que la ♣D soit dans la main de Nord est moins importante quand il a 13H (49%) que quand il a 12H (53%) !!!
Statbridge confirme ce résultat.
Pour expliquer ce phénomène, supposons que les seuls Honneurs du flanc soient 4 as et une dame.
Quand Nord aura 14H, la probabilité pour qu'il ait la dame sera 100%, puisque pour faire 14H, il faut forcément lui donner 3 as et la dame.
Par contre quand il aura 16H, il n'aura jamais la dame puisque la seule façon de lui donner 16H est qu'il ait les 4 as et rien d'autre.
Cela démontre que la probabilité de trouver un honneur dans une main n'est pas, au sens mathématique, une fonction croissante de la force de cette main, bien que la corrélation entre ces deux grandeurs, soit, généralement, celle que nous souffle le bon sens.